1 Aufgaben

Aufgabe 1:
Mach eine Kurvendiskussion (untersuche die folgende Funktionen auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte) mit folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - x - 2$

b) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2}$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Aufgabe 2:
Untersuche die folgende Funktionen auf Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, und Gleichung bzw. Steigung der Wendetangenten.

a) $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$

b) $f(x) = \frac{x^3}{6} + x^2$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

2 Lösungen

Aufgabe 1:
a) $f(x) = x^2 - x - 2$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x - 2 \\ f'(x) &= 2x - 1 \\ f''(x) &= 2 \end{aligned}$$

aa) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_{1,2} &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + 2} \\ &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{8}{4}} \\ &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} \\ x_{1,2} &= \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$x_1 = 2$
$x_2 - 1$
$N_1(2|0), N_2(-1|0)$

ab) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 0 \\ 2x &= 1 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} - 2 = -\tfrac{9}{4}$$

$E_1(\frac{1}{2}| - \frac{9}{4})$
Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt wird der X-Wert in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.
$f''(x) = 2$

$$f''(x_1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{ Tiefpunkt}$$

b) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2} \\ f'(x) &= -x + 3 \\ f''(x) &= -1 \end{aligned}$$

ba) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2} &= 0 | \cdot (-2) \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\ x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{4} \\ x_1 &= 5 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$N_1(5|0), N_2(1|0)$

bb) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$-x + 3 = 0$$

$x = 3$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = f(3) = -\frac{9}{2} + 3 \cdot 3 - \frac{5}{2} = 2$$

$E_1(3|2)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt wird der X-Wert in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.

$f''(x) = -1$

$$f''(x_1) = -1 < 0 \rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$HP(3|2)$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ f''(x) &= 6x - 12 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

ca) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 9x &= 0 \\ x(x^2 - 6x + 9) &= = 0 \\ x_1 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ x_{2,3} &= 3 \pm \sqrt{9-9} = 3 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$N_1(0|0), N_2(3|0), N_3(3|0)$

cb) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 9 &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm \sqrt{1} \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(1) = 1 - 6 + 9 = 4 \\ f(x_2) &= f(3) = 27 - 54 + 27 = 0 \end{aligned}$$

$E_1(1|4), E_2(3|0)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt werden X-Werte in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.
$f''(x) = 6x - 12$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \rightarrow \text{HP}(1|4) \\ f''(x_2) &= f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \rightarrow \text{TP}(3|0) \end{aligned}$$

cc) Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 6x - 12 &= = 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$$

Dritte Ableitung überprüfen $f'''(x) \neq 0$?
$f'''(x) = 6 \neq 0 \; WP(2|2)$

Aufgabe 2:

a) $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{4} - 3x \\ f'(x) &= 3\frac{x^2}{4} - 3 \\ f''(x) &= \frac{3}{2}x \\ f'''(x) &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

aa) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{4} - 3x &= 0 \\ x(\frac{x^2}{4} - 3) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ \frac{x^2}{4} - 3 &= 0 \\ x^2 - 12 &= 0 \\ x_{2,3} &= \pm\sqrt{12} \\ x_2 &= \sqrt{12} \\ x_3 &= -\sqrt{12} \end{aligned}$$

$N_1(0|0), N_2(\sqrt{12}|0), N_3(-\sqrt{12}|0)$

ab) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 3\frac{x^2}{4} - 3 &= 0 \\ 3\frac{x^2}{4} &= 3 \\ \frac{x^2}{4} &= 1 \\ x^2 &= 4 \\ x_{1,2} &= \pm 2 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(2) = \frac{8}{4} - 6 = -4 \\ f(x_2) &= -\frac{8}{4} + 6 = 4 \end{aligned}$$

$E_1(2|-4), E_2(-2|4)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt werden X-Werte in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.

$f''(x) = \frac{3}{2}x$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 > 0 \rightarrow \text{TP}(2|-4) \\ f''(x_2) &= f''(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3 < 0 \rightarrow \text{HP}(-2|4) \end{aligned}$$

ac) Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$ X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_w) = f(0) = 0$$

Dritte Ableitung überprüfen $f'''(x) \neq 0$?

$f'''(x) = \frac{3}{2} \neq 0\ WP(0|0)$

Wendetangente bestimmen:
X-Werte in die erste Ableitung der Funktion einsetzten:
$f'(x_w) = f'(0) = -3 = m_t$

$$\begin{aligned}
y - y_w &= m_t(x - x_w) \\
y - 0 &= -3(x - 0) \\
y &= -3x \\
t_w &= y = -3x
\end{aligned}$$

Aufgabe 2b:

b) $f(x) = \frac{x^3}{6} + x^2$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{6} + x^2 \\ f'(x) &= \frac{x^2}{2} + 2x \\ f''(x) &= x + 2 \\ f'''(x) &= 1 \end{aligned}$$

ba) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{6} + x^2 &= 0 \\ x^2(\frac{x}{6} + 1) &= 0 \\ x_{1,2} &= 0 \\ \frac{x}{6} + 1 &= 0 \\ \frac{x}{6} &= -1 \\ x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$N_1(0|0), N_2(0|0), N_3(-6|0)$

bb) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} + 2x &= 0 \\ x^2 + 4x &= 0 \\ x(x+4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x + 4 &= 0 \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(0) = 0 \\ f(x_2) &= f(-4) = -\frac{64}{6} + 16 = 5\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$E_1(0|0), E_2(-4|5\frac{1}{3})$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt werden X-Werte in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.

$f''(x) = x + 2$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(0) = 2 \rightarrow \mathrm{TP}(0|0) \\ f''(x_2) &= f''(-4) = -2 \rightarrow \mathrm{HP}(-4|5\tfrac{1}{3}) \end{aligned}$$

bc) Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$x + 2 = 0$$

$$x_w = -2$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_w) = f(-2) = -\frac{8}{6} + 4 = \frac{8}{3}$$

Dritte Ableitung überprüfen $f'''(x) \neq 0$?

$f'''(x) = 1 \neq 0$

Wendetangente bestimmen:
X-Werte in die erste Ableitung der Funktion einsetzten:
$f'(x_w) = f'(-2) = \frac{4}{2} - 4 = -2 = m_t$

$$\begin{aligned}
y - y_w &= m_t(x - x_w) \\
y - \tfrac{8}{3} &= -2(x+2) \\
y - \tfrac{8}{3} &= -2x - 4 \\
y &= -2x - 4 + \tfrac{8}{3} \\
y &= -2x - \tfrac{4}{3} \\
t_w &= y = -2x - \tfrac{4}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2c:

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + 4 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

ca) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 4 &= 0 \\ \text{Raten} x_1 &= 2 \\ 8 - 12 + 4 &= 0 \\ & \text{Polydivision liefert} x^2 - x - 2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_{2,3} &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{8}{4}} \\ x_{2,3} &= \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$N_1(2|0), N_2(2|0), N_3(-1|0)$

cb) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x &= 0 \\ x(3x - 6) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ 3x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

$x_2 = 2$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(0) = 4 \\ f(x_2) &= f(2) = 8 - 12 + 4 = 0 \end{aligned}$$

$E_1(0|4), E_2(2|0)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt werden X-Werte in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt.

$f''(x) = 6x - 6$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(0) = -6 \rightarrow HP(0|4) \\ f''(x_2) &= f''(2) = 12 - 6 = 6 \rightarrow TP(2|0) \end{aligned}$$

cc) Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 6x - 6 &= 0 \\ x_w &= 1 \end{aligned}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_w) = f(1) = 1 - 3 + 4 - 2$$

Dritte Ableitung überprüfen $f'''(x) \neq 0$?

$f'''(x) = 6 \neq 0$ $WP(1|2)$

Wendetangente bestimmen:
X-Werte in die erste Ableitung der Funktion einsetzten:
$f'(x_w) = f'(1) = 3 - 6 = -3 = m_t$

$$\begin{array}{lcl} y - y_w & = & m_t(x - x_w) \\ y - 2 & = & -3(x-1) = -3x + 3 \\ y & = & -3x + 5 \\ t_w & = & y = -3x + 5 \end{array}$$

Quelle: Kurvendiskussion und mehr Aufgaben
Mit freundlicher Unterstützung von: Beautystudio Freiburg