1 Aufgaben

Untersuche die folgende Funktionen auf Nullstellen, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extremwerte, y-Achsensymmetrie und Punktsymmetrie zum Ursprung (0|0) und zeichnen den Graph der Funktion.

Aufgabe 1: $f(x) = x^2 + 2$
Aufgabe 2: $f(x) = -x^2 + 1$
Aufgabe 3: $f(x) = -x^2 + 4$
Aufgabe 4: $f(x) = 2x^2 + 4$

Untersuche die folgende Funktionen auf Nullstellen, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extremwerte, Wendepunkte, y-Achsensymmetrie und Punktsymmetrie zum Ursprung (0|0) und zeichnen den Graph der Funktion.

Aufgabe 5: $f(x) = x^3 - x$

2 Lösungen

Aufgabe 1:
$f(x) = x^2 + 2$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2 \\ f'(x) &= 2x \\ f''(x) &= 2 \\ f'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

a) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= 0 \\ x^2 &= -2 \rightarrow \text{ keine Nullstelle vorhanden} \end{aligned}$$

b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen $f(x) = 0$ und $(0|f(0))$
Mit der x-Achse gibt es keinen Schnitt siehe a).
y-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2 \\ x &= 0 \\ f(0) &= 0^2 + 2 \\ f(0) &= 2 \end{aligned}$$

$S_y(0|2)$

c) Extremwerte $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x = 0 \\ 2x &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = f(0) = 0^2 + 2 = 2$$

$E_1(0|2)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt wird der X-Wert in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt
$f''(x) = 2$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(0) = 2 \\ f''(0) &> 0 \rightarrow \text{ Tiefpunkt} \end{aligned}$$

d) y-Achsensymmetrie und Punktsymmetrie zum Ursprung $(0|0)$
y-Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{?}{=} f(-x) \\ x^2 + 2 &\stackrel{?}{=} (-x)^2 + 2 \\ x^2 + 2 &= x^2 + 2 \\ f(x) &= f(-x) \end{aligned}$$

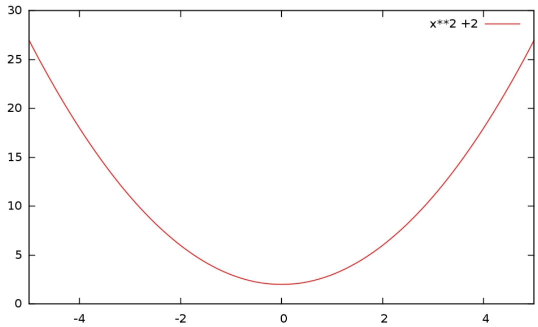
Die Funktion ist y-Achsen symmetriesch.

Punktsymmetrie zum Ursprung $(0|0)$: $-f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} -f(x) &\stackrel{?}{=} f(-x) \\ -(x^2+2) &\stackrel{?}{=} (-x)^2+2 \\ -x^2-2 &\neq x^2+2 \end{aligned}$$

Die Funktion ist nicht punktsymmetriesch zum Ursprung (0|0).

e) zeichnen den Graph der Funktion



Aufgabe 2:
$f(x) = -x^2 + 1$

$$\begin{array}{lcl} f(x) & = & -x^2+1 \\ f'(x) & = & -2x \\ f''(x) & = & -2 \\ f'''(x) & = & 0 \end{array}$$

a) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{array}{lcl} -x^2+1 & = & 0 \\ 1 & = & x^2 \\ x_{1,2} & = & \pm 1 \\ x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -1 \end{array}$$

$NS_{x_1}(1|0)$ und $NS_{x_2}(-1|0)$

b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen $f(x) = 0$ und $(0|f(0))$
Mit der x-Achse gibt es zwei Schnitt siehe a) $S_{x_1}(1|0)$ und $S_{x_2}(-1|0)$.
y-Achse:

$$\begin{array}{lcl} f(x) & = & -x^2+1 \\ x & = & 0 \\ f(0) & = & 0^2+1 \\ f(0) & = & 1 \end{array}$$

$S_y(0|1)$

c) Extremwerte $f'(x) = 0$

$$\begin{array}{lcl} f'(x) & = & -2x = 0 \\ -2x & = & 0 \end{array}$$
$$x = 0$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) \quad = \quad f(0) = 0^2 + 1 = 1$$

$E_1(0|1)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt wird der X-Wert in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt
$f''(x) = -2$

$$\begin{array}{lcl} f''(x_1) & = & f''(0) = -2 \\ f''(0) & < & 0 \rightarrow \text{ Hochpunkt} \end{array}$$

d) y-Achsensymmetrie und Punktsymmetrie zum Ursprung $(0|0)$
y-Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{?}{=} f(-x) \\ -x^2+1 &\stackrel{?}{=} -(-x)^2+1 \\ -x^2+1 &= -x^2+1 \\ f(x) &= f(-x) \end{aligned}$$

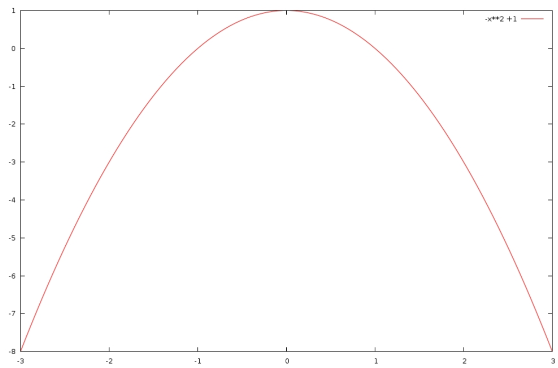
Die Funktion ist y-Achsen symmetriesch.

Punktsymmetrie zum Ursprung (0|0): $-f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} -f(x) &\stackrel{?}{=} f(-x) \\ -(-x^2+1) &\stackrel{?}{=} -(-x)^2+1 \\ x^2-1 &\neq -x^2+1 \end{aligned}$$

Die Funktion ist nicht punktsymmetriesch zum Ursprung (0|0).

e) zeichnen den Graph der Funktion



Aufgabe 3:
$f(x) = -x^2 + 4$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & -x^2+4 \\ f'(x) & = & -2x \\ f''(x) & = & -2 \\ f'''(x) & = & 0 \end{array}$$

a) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{array}{lcl} -x^2+4 & = & 0 \\ 4 & = & x^2 \\ x_{1,2} & = & \pm 2 \\ x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & -2 \end{array}$$

$NS_{x_1}(2|0)$ und $NS_{x_2}(-2|0)$

b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen $f(x) = 0$ und $(0|f(0))$
Mit der x-Achse gibt es zwei Schnitt siehe a) $S_{x_1}(2|0)$ und $S_{x_2}(-2|0)$.
y-Achse:

$$\begin{array}{lcl} f(x) & = & -x^2+4 \\ x & = & 0 \\ f(0) & = & 0^2+4 \\ f(0) & = & 4 \end{array}$$

$S_y(0|4)$

c) Extremwerte $f'(x) = 0$

$$\begin{array}{lcl} f'(x) & = & -2x = 0 \\ -2x & = & 0 \\ x = 0 & & \end{array}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = f(0) = 0^2 + 4 = 4$$

$E_1(0|4)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt wird der X-Wert in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt
$f''(x) = -2$

$$\begin{array}{lcl} f''(x_1) & = & f''(0) = -2 \\ f''(0) & < & 0 \rightarrow \text{ Hochpunkt} \end{array}$$

d) y-Achsensymmetrie und Punktsymmetrie zum Ursprung $(0|0)$
y-Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{?}{=} f(-x) \\ -x^2+4 &\stackrel{?}{=} -(-x)^2+4 \\ -x^2+4 &= -x^2+4 \\ f(x) &= f(-x) \end{aligned}$$

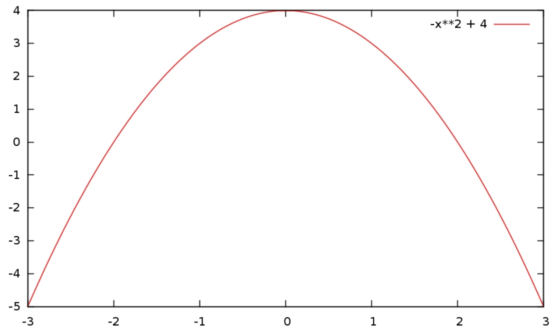
Die Funktion ist y-Achsen symmetriesch.

Punktsymmetrie zum Ursprung (0|0): $-f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} -f(x) &\stackrel{?}{=} f(-x) \\ -(-x^2+4) &\stackrel{?}{=} -(-x)^2+4 \\ x^2-4 &\neq -x^2+4 \end{aligned}$$

Die Funktion ist nicht punktsymmetriesch zum Ursprung (0|0).

e) zeichnen den Graph der Funktion



Aufgabe 4:
$f(x) = 2x^2 + 4$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4 \\ f'(x) &= 4x \\ f''(x) &= 4 \\ f'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

a) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4 &= 0 \\ 2x^2 &= -4 \\ x^2 &= -2 \rightarrow \text{ keine Nullstelle vorhanden} \end{aligned}$$

b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen $f(x) = 0$ und $(0|f(0))$
Mit der x-Achse gibt es keinen Schnittpunkt siehe a) .
y-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4 \\ x &= 0 \\ f(0) &= 2 \cdot 0^2 + 4 \\ f(0) &= 4 \end{aligned}$$

$S_y(0|4)$

c) Extremwerte $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x = 0 \\ 4x &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = f(0) = 2 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$E_1(0|4)$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt wird der X-Wert in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt
$f''(x) = 4$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(0) = 4 \\ f''(0) &> 0 \rightarrow \text{ Tiefpunkt} \end{aligned}$$

d) y-Achsensymmetrie und Punktsymmetrie zum Ursprung $(0|0)$
y-Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{?}{=} f(-x) \\ 2x^2 + 4 &\stackrel{?}{=} 2 \cdot (-x)^2 + 4 \\ 2x^2 + 4 &= 2x^2 + 4 \\ f(x) &= f(-x) \end{aligned}$$

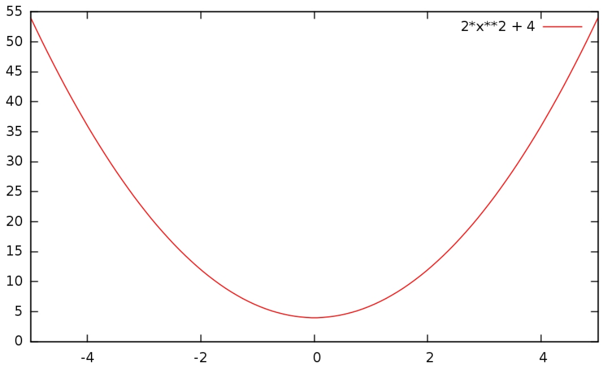
Die Funktion ist y-Achsen symmetriesch.

Punktsymmetrie zum Ursprung $(0|0)$: $-f(x) = f(-x)$

$$
\begin{aligned}
-f(x) &\stackrel{?}{=} f(-x) \\
-(2x^2+4) &\stackrel{?}{=} 2\cdot(-x)^2+4 \\
-2x^2-4 &\neq 2x^2+4
\end{aligned}
$$

Die Funktion ist nicht punktsymmetriesch zum Ursprung (0|0).

e) zeichnen den Graph der Funktion



Aufgabe 5:
$f(x) = x^3 - x$

$$\begin{array}{lcl} f(x) & = & x^3 - x \\ f'(x) & = & 3x^2 - 1 \\ f''(x) & = & 6x \\ f'''(x) & = & 6 \end{array}$$

a) Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\begin{array}{lcl} x^3 - x & = & 0 \\ x(x^2 - 1) & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \\ x^2 - 1 & = & 0 \\ x^2 & = & 1 \\ x_{2,3} & = & \pm 1 \end{array}$$

$NS_{x_1}(0|0), NS_{x_2}(1|0)$ und $NS_{x_3}(-1|0)$

b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen $f(x) = 0$ und $(0|f(0))$
Mit der x-Achse gibt es drei Schnittpunkte siehe a) $S_{x_1}(0|0), S_{x_2}(1|0)$ und $S_{x_3}(-1|0)$.
y-Achse:

$$\begin{array}{lcl} f(x) & = & x^3 - x \\ x & = & 0 \\ f(0) & = & 0^3 - 0 \\ f(0) & = & 0 \end{array}$$

$S_y(0|0)$

c) Extremwerte $f'(x) = 0$

$$\begin{array}{lcl} f'(x) & = & 3x^2 - 1 = 0 \\ 3x^2 & = & 1 \\ x^2 & = & \frac{1}{3} \\ x_{1,2} & = & \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

X-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen.
$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{array}{lcl} f(x_1) & = & f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = (\frac{1}{\sqrt{3}})^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & = & \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & = & \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot \sqrt{3}} \\ & = & -\frac{2}{3\sqrt{3}} \end{array}$$

$E_1(\frac{1}{\sqrt{3}}| - \frac{2}{3\sqrt{3}})$

$$\begin{aligned}
f(x_2) &= f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = (-\tfrac{1}{\sqrt{3}})^3 - (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \\
&= -\tfrac{1}{3\sqrt{3}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} \\
&= -\tfrac{1}{3\sqrt{3}} + \tfrac{3 \cdot 1}{3 \cdot \sqrt{3}} \\
&= \tfrac{2}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$E_2(-\frac{1}{\sqrt{3}}|\frac{2}{3\sqrt{3}})$

Um zu überprüfen ob es sich bei den gefunden Extremwerten um einen Hoch-, Tief- und Wendepunkt handelt wird der X-Wert in die zweite Ableitungen der Funktion eingesetzt
$f''(x) = 6x$

$$\begin{aligned}
f''(x_1) &= f''(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = 6 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} \\
f''(0) &> 0 \rightarrow \text{ Tiefpunkt}
\end{aligned}$$

$\mathrm{TP}_1(\frac{1}{\sqrt{3}}| - \frac{2}{3\sqrt{3}})$

$$\begin{aligned}
f''(x_2) &= f''(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = -6 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} \\
f''(0) &< 0 \rightarrow \text{ Hochpunkt}
\end{aligned}$$

$\mathrm{HP}_1(-\frac{1}{\sqrt{3}}|\frac{2}{3\sqrt{3}})$

d) Wendepunkt

$$\begin{aligned}
f^{''}(x) &= 6x = 0 \\
6x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

$f(x) = f(0) = 0$
WP(0|0) da $f^{'''}(x) = 6 \neq 0$

e) y-Achsensymmetrie und Punktsymmetrie zum Ursprung (0|0)
y-Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &\stackrel{?}{=} f(-x) \\
x^3 - x &\stackrel{?}{=} (-x)^3 - (-x) \\
x^3 - x &\neq -x^3 + x \\
f(x) &\neq f(-x)
\end{aligned}$$

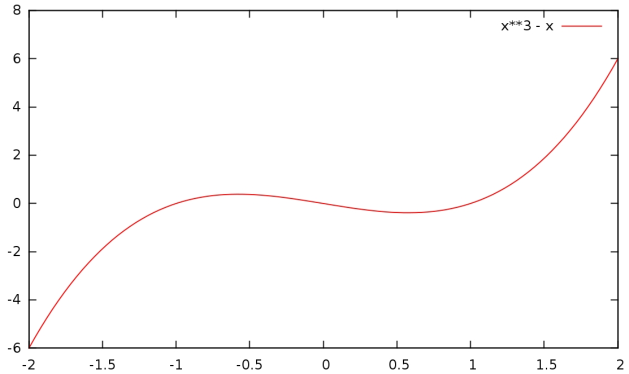
Die Funktion ist nicht y-Achsen symmetriesch.

Punktsymmetrie zum Ursprung (0|0): $-f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned}
-f(x) &\stackrel{?}{=} f(-x) \\
-(x^3 - x) &\stackrel{?}{=} (-x)^3 - (-x) \\
-x^3 + x &= -x^3 + x \\
-f(x) &= f(-x)
\end{aligned}$$

Die Funktion ist punktsymmetriesch zum Ursprung (0|0).

e) Zeichnen den Graph der Funktion



Quelle und mehr Aufgaben
Mit freundlicher Unterstützung von: amilando.de