Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgaben

Aufgabe 1
Beim Drucken im Computer–Pool kommt es immer wieder zu einem Papierstau.Einer der Poolmgr hat rausgefunden das die Wahrscheinlichkeit einen Papierstau zu haben, abhängig, von den zu druckenden Dateien ist. Er hat die Dateien in zwei Typen eingeteilt. Typ 1 sind pdf Dateien und Typ 2 sind ps Dateien. Aufgrund längere Beobachtungen ergab sich folgende Tabelle.

Datei Typ	Anteil an den Druckaufträgen (in %)	Papierstau (in %)
1	50 %	20 %
2	50 %	2 %

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ... Die Datei ist vom Typ i (i = 1,2)
- B ... es gibt ein Papierstau

(b) Drücken Sie die in obiger Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ und der Ereignisse A_1, A_2 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Papierstau durch eine Datei vom Typ i verursacht wurde (i = 1,2) ?

Aufgabe 2
Im Pool wurde ein neuer Drucker aufgestellt und zusätzlich bessere Software installiert. Auch hat man rausgefunden, das nicht der Typ der Datei der Grund des Papierstaus war, sondern der jeweilige Lehrstuhl, aus dem die Datei stammt. Insgesamt gibt es drei Lehrstühle. Aufgrund dieser neuen Bedingungen ergab sich folgende Tabelle.

Typ	Anteil (in %)	Fehler (in %)
1	50	4
2	40	1.25
3	10	25

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ... Die Datei stammt vom Lehrstuhl i (i = 1,2,3)
- B ... Es gibt einen Papierstau

(b) Drücken Sie die in obiger Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ und der Ereignisse A_1, A_2, A_3 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Papierstau durch eine Datei vom Typ i verursacht wurde (i = 1,2,3) ?

Aufgabe 3

Aufgrund der schlechten Klausurergebnisse in der letzten Zeit, hat man sich über die Qualität der Übungen Gedanken gemacht.
Um herauszufinden ob es einen Zusammenhang, zwischen dem Besuch der Übungen und dem Bestehen der Klausuren gibt, hat man eine Umfrage unter den Studenten durchgeführt. Dabei ergab sich folgende Tabelle.
Studenten vom Typ 1 waren in der Übung, und Studenten vom Typ 2 waren nicht in der Übung.

Typ	Anteil (in %)	Durchgefallen (in %)
1	40	22.5
2	60	35

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ... Der Student ist vom Typ i (i = 1,2)
- B ... ist durchgefallen

(b) Drücken Sie die in obiger Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ und der Ereignisse A_1, A_2 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß einer vom Typ i durchgefallen ist (i = 1,2) ?

Aufgabe 4

Aufgrund des Ergebnisses von Aufgabe 3 gab es eine heftige Diskussion, darüber, ob es an den Übungen liegt, oder nicht doch davon abhängt, ob die Studenten die Übungsblätter abgegeben haben.
Zum Glück wurde dies bereits bei der ersten Umfrage miterhoben.
Studenten vom Typ 1 haben die Übungsblätter abgegeben, Studenten vom Typ 2 nicht.Es ergab sich folgende Tabelle.

Typ	Anteil (in %)	Durchgefallen (in %)
1	50	27
2	50	33

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ... Der Student ist vom Typ i (i = 1,2)
- B ... ist durchgefallen

(b) Drücken Sie die in obiger Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ und der Ereignisse A_1, A_2 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß einer vom Typ i durchgefallen ist (i = 1,2) ?

Aufgabe 5
Insgesamt war man mit den Ergebnissen, aus Aufgabe 34 und 35 nicht zufrieden.
Es blieb also nichts anderes übrig als die komplette Umfrage auszuwerten.
Diesmal ergaben sich 5 Typen von Studenten.
Typ 1 := selbstgemachte Aufgabenzettel und Übung
Typ 2 := abgeschrieben und ohne Besuch der Übung
Typ 3 := abgeschrieben und mit Besuch der Übung
Typ 4 := nix abgegeben und mit Besuch der Übung
Typ 5 := garnix
Es ergab sich dann die folgende Tabelle.

Typ	Anteil (in %)	Durchgefallen (in %)
1	10	15
2	20	37.5
3	20	22.5
4	10	30
5	40	33.75

(a) Geben Sie für diese Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ... Der Student ist vom Typ i (i = 1,2,3,4,5)
- B ... ist durchgefallen

(b) Drücken Sie die in obiger Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ und der Ereignisse A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer vom Typ i durchgefallen ist (i = 1,. . . ,5)?

Aufgabe 6
Aufgrund des mangelnden Praxisbezugs des Informatik Studiums, wurden Projektarbeiten eingeführt und da man in der Industrie ja auch nicht allein arbeitet, wurden die Studenten in Teams zu je vier Studenten eingeteilt. Die Teams waren für die Arbeitsverteilung innerhalb der Gruppe selbst verantwortlich.
Bei dem hier betrachteten Team 1 "wir machen alle gleichviel", wurde es so geregelt, dass alle gleich viele der Codezeilen programmieren.
Es ergab sich folgende Tabelle.

Mitglied	Codeanteil (in %)	Fehler (in %)
1	25	15
2	25	18
3	25	9
4	25	18

Dem fertigen Code ist nicht mehr ansehen, von welchen Mitglied er programmiert wurde. Aus der Masse an Code wird rein zufällig eine Zeile herausgegriffen und auf Fehler überprüft.

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ...Der Code wurde vom Mitglied i programmiert (i = 1,2,3,4)
- B ... Der Code ist fehlerhaft

(b) Drücken Sie die in obiger Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ und der Ereignisse A_1, A_2, A_3, A_4 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein fehlerhafter Code von Mitglied i programmiert wurde (i = 1,2,3,4) ?

Aufgabe 7
Bei dem Software Projekt aus Aufgabe 6 gab es noch andere Teams.
Bei dem jetzt betrachtetem Team 2 “jeder macht das was er am besten kann” ergab sich die folgende Tabelle.

Mitglied	Codeanteil (in %)	Fehler (in %)
1	20	1,25
2	20	2.5
3	20	5
4	40	1.875

Dem fertigen Code ist nicht mehr ansehen, von welchem Mitglied er programmiert wurde. Aus der Masse an Code wird rein zufällig eine Zeile herausgegriffen und auf Fehler überprüft.

(a) Geben Sie für dieses Zufallsexperiment einen geeigneten Grundraum Ω an, und beschreiben Sie in diesem die Ereignisse

- A_i ...Der Code wurde vom Mitglied i programmiert (i = 1,2,3,4)
- B ... Der Code ist fehlerhaft

(b) Drücken Sie die in obiger Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des dazu gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ und der Ereignisse A_1, A_2, A_3, A_4 und B aus

(c) Berechnen Sie P(B)

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein fehlerhafter Code von Mitglied i programmiert wurde (i = 1,2,3,4) ?

Aufgabe 8
Mit zwei idealen Würfeln werde einmal gewürfelt.

(a) Beschreiben Sie die Ereignissen einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ und geben Sie deren Wahrscheinlichkeiten an:

- A ... Die Augensumme ist gerade
- B ... Die Augensumme ist durch 3 teilbar
- C ... Die Augensumme ist mind. 9 und kleiner 12

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A|B), P(B|A), P(A|C), P(C|A), P(B|C), P(C|B), P(A|B \cap C)$ und $P(B|A \cap C)$

Aufgabe 9
Mit zwei idealen Würfeln werde einmal gewürfelt.

(a) Beschreiben Sie die Ereignisse in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ und geben Sie deren Wahrscheinlichkeiten an:
   - A ... Die Augensumme ist durch 2 teilbar
   - B ... Die Augensumme ist durch 3 teilbar
   - C ... Die Augensumme ist durch 4 teilbar

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A|B), P(B|A), P(A|C), P(C|A), P(B|C),$ $P(C|B), P(A|B \cap C)$ und $P(B|A \cap C)$

Aufgabe 10
Mit zwei idealen Würfeln werde einmal gewürfelt.

(a) Beschreiben Sie die Ereignisse in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ und geben Sie deren Wahrscheinlichkeiten an:
   - A ... Die Augensumme beträgt 7
   - B ... Unter den Augenzahlen befindet sich keine '2' und keine '5'
   - C ... Eine der Augenzahlen ist gerade, und die andere Augenzahl ist ungerade

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A|B), P(B|A), P(A|C), P(C|A), P(B|C),$ $P(C|B), P(A|B \cap C)$ und $P(B|A \cap C)$

(c) Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen von Ereignissen unabhängig sind:
   i. A und B
   ii. A und C
   iii. B und C
   iv. A,B und C

Aufgabe 11
Unser Team "wir machen alle gleichviel" (WMAG) hat sich nach dem enttäuschenden Ergebnis beim Software Praktikum dafür entschieden etwas handfestes zu machen. Und sind nun dabei Computer zusammen zu schrauben. Leider fehlt ihnen auch hierbei das dafür notwendige Geschick, so daß im Durchschnitt 20% der Computer Ausschuss sind. Glücklicherweise gibt es eine elektronische Endkontrolle die mit Wahrscheinlichkeit 0.95 einen fehlerhaften Computer erkennt, aber den Nachteil hat das sie mit Wahrscheinlichkeit 0.02 auch einen fehlerfreien Computer aussortiert.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Computer, der die Endkontrolle passiert, trotzdem fehlerhaft ist?

Aufgabe 12
Nach dem Erfolg vom Team WMAG beim Verkauf von Computern hat sich nun auch das Team "jeder macht das was er am besten kann" berufen gefühlt Computer zu produzieren und zu verkaufen. Im Mittel sind 5% der Computer defekt. Die hier verwendete

Endkontrolle schlägt bei 96 % aller defekten und bei 2% aller funktionstüchtigen Computer Alarm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Computer, bei dem der Test einen Fehler meldet, tatsächlich defekt?

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

(a)

$\Omega = \{(\omega_1, \bar{\omega_1}, \omega_2, \bar{\omega_2}\}$

$A_i = \{\omega_i, \bar{\omega_i}\}$

$B = \{\bar{\omega_1}, \bar{\omega_2}\}$

(b)

$P(A_1) = 0.5 \quad P(B|A_1) = 0.2$

$P(A_2) = 0.5 \quad P(B|A_2) = 0.02$

(c)

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = \sum_{i=1}^{2} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)$

$P(B) = 0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.02 = 0.1 + 0.01 = 0.11$

(d)

Bayes'sche Formel

$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$

$P(A_1|B) = \frac{0.5 \cdot 0.2}{0.11} = \frac{0.1}{0.11} = \frac{10}{11}$

$P(A_2|B) = \frac{0.5 \cdot 0.02}{0.11} = \frac{0.01}{0.11} = \frac{1}{11}$

Lösung zu Aufgabe 2

(a)

$\Omega = \{\omega_i, \bar{\omega_i} | i \in \{1, 2, 3\}\}$

$A_i = \{\omega_i, \bar{\omega_i}\}$

$B = \{\bar{\omega_i} | i \in \{1, 2, 3\}\}$

(b)

$P(A_1) = 0.50 \quad P(B|A_1) = 0.04$

$P(A_2) = 0.40 \quad P(B|A_2) = 0.0125$

$P(A_3) = 0.10 \quad P(B|A_3) = 0.25$

(c)

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$

$P(B) = 0.5 \cdot 0.04 + 0.4 \cdot 0.0125 + 0.1 \cdot 0.25$

$P(B) = 0.02 + 0.005 + 0.025$

$P(B) = 0.05$

(d)

Bayes'sche Formel

$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$

$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.04}{0.05} = 0.40$

$P(A_2|B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.4 \cdot 0.0125}{0.05} = 0.10$

$P(A_3|B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.1 \cdot 0.25}{0.05} = 0.50$

Lösung zu Aufgabe 3

(a)

$\Omega = \{(\omega_1, \bar{\omega_1}, \omega_2, \bar{\omega_2}\}$

$A_i = \{\omega_i, \bar{\omega_i}\}$

$B = \{\bar{\omega_1}, \bar{\omega_2}\}$

(b)

$P(A_1) = 0.4 \quad P(B|A_1) = 0.225$

$P(A_2) = 0.6 \quad P(B|A_2) = 0.35$

(c)

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = \sum_{i=1}^{2} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)$

$P(B) = 0.4 \cdot 0.225 + 0.6 \cdot 0.35 = 0.09 + 0.21 = 0.30$

(d)

Bayes'sche Formel

$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$

$P(A_1|B) = \frac{0.09}{0.30} = 0.3$

$P(A_2|B) = \frac{0.21}{0.30} = 0.7$

Lösung zu Aufgabe 4

(a)

$\Omega = \{(\omega_1, \bar{\omega_1}, \omega_2, \bar{\omega_2}\}$

$A_i = \{\omega_i, \bar{\omega_i}\}$

$B = \{\bar{\omega_1}, \bar{\omega_2}\}$

(b)

$P(A_1) = 0.5 \quad P(B|A_1) = 0.27$

$P(A_2) = 0.5 \quad P(B|A_2) = 0.33$

(c)

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = \sum_{i=1}^{2} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)$

$P(B) = 0.5 \cdot 0.27 + 0.5 \cdot 0.33 = 0.135 + 0.165 = 0.30$

(d)

Bayes'sche Formel

$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$

$P(A_1|B) = \frac{0.135}{0.30} = 0.45$

$P(A_2|B) = \frac{0.165}{0.30} = 0.55$

Lösung zu Aufgabe 5

(a)

$\Omega = \{\omega_i, \bar{\omega_i} | i \in \{1,2,3,4\}\}$

$A_i = \{\omega_i, \bar{\omega_i}\}$

$B = \{\bar{\omega_i} | i \in \{1,2,3,4\}\}$

(b)

$P(A_1) = 0.25 \quad P(B|A_1) = 0.15$

$P(A_2) = 0.25 \quad P(B|A_2) = 0.18$

$P(A_3) = 0.25 \quad P(B|A_3) = 0.09$

$P(A_4) = 0.25 \quad P(B|A_4) = 0.18$

(c)

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + P(A_4) \cdot P(B|A_4)$

$P(B) = 0.25 \cdot 0.15 + 0.25 \cdot 0.18 + 0.25 \cdot 0.09 + 0.25 \cdot 0.18$

$P(B) = 0.15$

(d)

Bayes'sche Formel

$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$

$P(A_1|B) = 0.25$

$P(A_2|B) = 0.30$

$P(A_3|B) = 0.15$

$P(A_4|B) = 0.30$

Lösung zu Aufgabe 6

(a)

$\Omega = \{\omega_i, \bar{\omega_i} | i \in \{1,2,3,4\}\}$

$A_i = \{\omega_i, \bar{\omega_i}\}$

$B = \{\bar{\omega_i} | i \in \{1,2,3,4\}\}$

(b)

$P(A_1) = 0.20 \quad P(B|A_1) = 0.0125$

$P(A_2) = 0.20 \quad P(B|A_2) = 0.025$

$P(A_3) = 0.20 \quad P(B|A_3) = 0.005$

$P(A_4) = 0.40 \quad P(B|A_4) = 0.018755$

(c)

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + P(A_4) \cdot P(B|A_4)$

$P(B) = 0.20 \cdot 0.0125 + 0.20 \cdot 0.025 + 0.20 \cdot 0.05 + 0.40 \cdot 0.01875$

$P(B) = 0.025$

(d)
Bayes'sche Formel
$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot P(B|A_j)}$
$P(A_1|B) = 0.10$
$P(A_2|B) = 0.20$
$P(A_3|B) = 0.40$
$P(A_4|B) = 0.30$

Lösung zu Aufgabe 7

(a)
$\Omega = \{(\omega_i, \bar{\omega_i}|i \in \{1,2,3,4,5\}\}$
$A_i = \{\omega_i, \bar{\omega_i}\}$
$B = \{\bar{\omega_i}|i \in \{1,2,3,4,5\}\}$

(b)
$P(A_1) = 0.10 \quad P(B|A_1) = 0.15$
$P(A_2) = 0.20 \quad P(B|A_2) = 0.375$
$P(A_3) = 0.20 \quad P(B|A_1) = 0.225$
$P(A_4) = 0.10 \quad P(B|A_2) = 0.30$
$P(A_5) = 0.40 \quad P(B|A_2) = 0.3375$
Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:
$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)$
$P(B) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i)\cdot P(B|A_i)$
$P(B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3) + P(A_4)\cdot P(B|A_4) + P(A_5)\cdot P(B|A_5)$
$P(B) = 0.1\cdot 0.15 + 0.2\cdot 0.375 + 0.2\cdot 0.225 + 0.1\cdot 0.3 + 0.4\cdot 0.3375$
$P(B) = 0.015 + 0.075 + 0.045 + 0.03 + 0.135$
$P(B) = 0.3$

(d)
Bayes'sche Formel
$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot P(B|A_j)}$

$P(A_1|B) = \frac{0.015}{0.30} = 0.05$

$P(A_2|B) = \frac{0.075}{0.30} = 0.25$

$P(A_3|B) = \frac{0.045}{0.30} = 0.15$

$P(A_4|B) = \frac{0.03}{0.30} = 0.1$

$P(A_5|B) = \frac{0.135}{0.30} = 0.45$

Lösung zu Aufgabe 8

$\Omega = \{(1,2,3,4,5,6)^2\} \qquad |\Omega| = 6^2 = 36$

$A = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),$
$(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),$
$(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

$|A| = 18 \qquad P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$B = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6),$
$(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}$

$|B| = 12 \qquad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$C = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),$
$(5,6),(6,3),(6,4),(6,5)\}$

$|C| = 9 \qquad P(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

(b)

$A \cap B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,6)\}$

$|A \cap B| = 6$

$A \cap C = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

$|A \cap C| = 3$

$B \cap C = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

$B \cap C| = 4$

$A \cap B \cap C = \{ \quad \}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{B} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{A} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{C} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{A} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{C} = \frac{4}{9}$$

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{B} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \emptyset$$

$$P(B|A \cap C) = \frac{P(B \cap A \cap C)}{P(A \cap C)} = \emptyset$$

Lösung zu Aufgabe 9

(a)

$\Omega = \{(1,2,3,4,5,6)^2\} \qquad |\Omega| = 6^2 = 36$

$A = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),$
$(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),$
$(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

$|A| = 18 \qquad P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$B = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6),$
$(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}$

$|B| = 12 \qquad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$C = \{(1,3),(2,2),(2,6),(3,1),$
$(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(6,6)\}$

$|C| = 9 \qquad P(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$|A \cap B| = 6$
$|A \cap C| = 9$
$|B \cap C| = 1$
$|A \cap B \cap C| = 1$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{B} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{A} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{C} = \frac{9}{9} = 1$

$P(C|A) = \frac{P(C\cap A)}{A} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

$P(B|C) = \frac{P(B\cap C)}{C} = \frac{1}{9}$

$P(C|B) = \frac{P(C\cap B)}{B} = \frac{1}{12}$

$P(A|B \cap C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)} = \frac{1}{1} = 1$

$P(B|A \cap C) = \frac{P(B\cap A\cap C)}{P(A\cap C)} = \frac{1}{9}$

Lösung zu Aufgabe 10

(a)

$|\Omega| = 6^2 = 36$

$A := \{(6,1)(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\}$

$A := \{(\omega_i, \omega_j) \in \Omega : \omega_i + \omega_j = 7\}$

$|A| = 6$

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B := \{(1,1),(1,3),(1,4),(1,6),(3,1),(3,3),(3,4),(3,6),$
$(4,1),(4,3),(4,4),(4,6),(6,1),(6,3),(6,4),(6,6)\}$

$B := \{(\omega_i, \omega_j) \in \Omega : \omega_{i,j} \neq 2 \vee 5\}$

$|B| = 16$

$P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$C := \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),$
$(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),$
$(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\}$

$C := \{(\omega_i, \omega_j) \in \Omega : \omega_i = \{1,3,5\}, \omega_j = \{2,4,6\}\}$

$|C| = 18$

$P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{(6,1),(4,3),(3,4),(1,6)\}$

$|A \cap B| = 4$

$A \cap C = \{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\}$

$|A \cap C| = 6$

$B \cap C = \{(1,4),(1,6),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(6,1),(6,3)\}$

$|B \cap C| = 8$

$A \cap B \cap C = \{(6,1),(4,3),(3,4),(1,6)\}$

$|A \cap B \cap C| = 4$

(b)

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{B} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{A} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{C} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{A} = \frac{6}{6} = 1$

$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{C} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{B} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(B|A \cap C) = \frac{P(B \cap A \cap C)}{P(A \cap C)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(c)
(i.)
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\frac{1}{9} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9}$
(ii.)
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$
(iii.)
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
$\frac{4}{9} \neq \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}$
(iv.) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
$\frac{4}{36} = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{27}$

Lösung zu Aufgabe 11

$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^2$

$\omega_1 = \begin{cases} 1 : \text{Computer ist fehlerhaft} \\ 0 : \text{Computer ist nicht fehlerhaft} \end{cases}$
$\omega_2 = \begin{cases} 1 : \text{Endkontrolle sortiert Computer aus,} \\ 0 : \text{Endkontrolle sortiert Computer nicht aus,} \end{cases}$
Sowie die Ereignisse
$F = \{(1,0),(1,1)\} = \{$ Computer ist fehlerhaft $\}$
$A = \{(0,1),(1,1)\} = \{$ Computer wird aussortiert $\}$
$P(F) = 0.2$, $P(F^c) = 0.8$, $P(A \mid F) = 0.95$, $P(A \mid F^c) = 0.02$
und somit
$P(A^c \mid F) = 0.05$, $P(A^c \mid F^c) = 0.98$
Die Bayes Formel liefert dann
$P(F \mid A^c) = \frac{P(A^c|F) \cdot P(F)}{P(A^c|F) \cdot P(F) + P(A^c|F^c) \cdot P(F^c)}$
$P(F \mid A^c) = \frac{0.05 \cdot 0.2}{0.05 \cdot 0.2 + 0.98 \cdot 0.8} = 0.0126$

Lösung zu Aufgabe 12
5% defekt
96% aller defekten Computer erkennt die Endkontrolle
2% aller guten werden als defekt erkannt
Wahrscheinlichkeit davon, dass wenn der Test Fehler meldet, ein Teil wirklich defekt ist?
$\Omega\{\omega = \{\omega_1, \omega_2)|\omega_1, \omega_2 \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^2$

$$\omega_1 = \begin{cases} 1 : \text{Computer ist fehlerhaft} \\ 0 : \text{Computer ist nicht fehlerhaft} \end{cases}$$

$$\omega_2 = \begin{cases} 1 : \text{Endkontrolle sortiert Computer aus,} \\ 0 : \text{Endkontrolle sortiert Computer nicht aus,} \end{cases}$$

Sowie die Ereignisse
$F = \{(1,0),(1,1)\} = \{$ Computer ist fehlerhaft $\}$
$A = \{(0,1),(1,1)\} = \{$ Computer wird aussortiert $\}$
$P(F) = 0.05 \rightarrow P(F^c) = 0.95$
$P(A|F) = 0.96 \rightarrow P(A^c|F) = 0.04$
$P(A|F^c) = 0.02 \rightarrow P(A^c|F^c) = 0.98$
Gesucht ist $P(F|A)$

$P(F|A) = \frac{P(A|F)\cdot P(F)}{P(A|F)\cdot P(F)+P(A|F^c)\cdot P(F^c)}$

$P(F|A) = \frac{0.96\cdot 0.05}{0.96\cdot 0.05+0.02\cdot 0.95}$

$P(F|A) = \frac{0.048}{0.048+0.019} = \frac{0.048}{0.067} = 0.716417...$

Quelle: Stochastik
Mit freundlicher Unterstützung von: und http://www.gogirlglow.de