Binomialverteilung

Aufgaben

Aufgabe 1
Eine faire Münze wird 10–mal geworfen. Wenn dabei 3–mal Wappen erscheint gewinnen Sie. Wie großist die Wahrscheinlichkeit dass Sie gewinnen?

Aufgabe 2
Eine faire Münze wird 11–mal geworfen. Wenn dabei 2– oder 3– mal Wappen erscheint gewinnen Sie. Wie großist bei diesem Spiel Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit?

Aufgabe 3
Die Wahrscheinlichkeit dafür dass ein Mensch die Blutgruppe 0 hat, sei 40 %.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben von 10 zufällig ausgewählten Personen strickt weniger als 4 die Blutgruppe 0?

b) Angenommen die Wahrscheinlichkeit dafür Träger eines positiven Rhesusfaktor zu sein sei 90% unabhängig von der Blutgruppe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben dann echt weniger wie 3 die Blutgruppe 0+?

Aufgabe 4
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Mensch die Blutgruppe A+ hat ist 37 %, bei 0+ ist sie 35 %, bei B+ ist sie 9 % und bei AB+ beträgt sie 4 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das von 10 zufällig ausgewählten Studenten

a) genau einer Rhesus negativ hat?

b) strikt weniger als 2 Rhesus negativ haben?

Aufgabe 5
Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt beträgt 18/35. Innerhalb einer Studie werden Familien mit 3 Kindern untersucht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das es in einer Familie zwei Mädchen und einen Knaben?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür das eine Familie 3 Knaben hat?

Aufgabe 6
Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt beträgt 18/35. Innerhalb einer Studie werden Familien mit 6 Kindern untersucht.

a) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für $i = 0, \ldots 6$ Knaben pro Familie.

b) Fertigen Sie anhand der Ergebnisse aus Aufgabenteil a) ein Histogramm an. Welcher Verteilung ähnelt dieses Histogramm?

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1
Die Wahrscheinlichkeit das Wappen bzw. Kopf erscheint ist gleich,d.h. $p = \frac{1}{2}$ und $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 3 \quad n = 10 \quad p = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ &= \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ &= 120 \cdot \frac{1}{1024} \\ &\approx 0.1171875 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen beträgt ca. 11.72 % .

Lösung zu Aufgabe 2
Die Wahrscheinlichkeit das Wappen bzw. Kopf erscheint ist gleich,d.h. $p = \frac{1}{2}$ und $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = \{2, 3\} \quad n = 11 \quad p = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} P(X = 2 \land X = 3) &= \binom{11}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \binom{11}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ &= \binom{11}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \binom{11}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \\ &= 55 \cdot \frac{1}{2048} + 165 \cdot \frac{1}{2048} \\ &= \frac{220}{2048} \\ &\approx 0.10742188 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen beträgt ca. 10.74 % .

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die Wahrscheinlichkeit für die Blutgruppe 0 ist $p = 0.4$ und die Wahrscheinlichkeit nicht dieser Gruppe anzugehören beträgt daher $q = 1 - p = 0.6$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k < 4 \quad n = 10 \quad p = 0.4 \quad q = 0.6$

$$\begin{aligned} P(X < 4) = & \binom{10}{0} (0.4)^0 (0.6)^{10} + \binom{10}{1} (0.4)^1 (0.6)^9 \\ & + \binom{10}{2} (0.4)^2 (0.6)^8 + \binom{10}{3} (0.4)^3 (0.6)^7 \\ & = 0.0060466176 + 0.040310784 + 0.12093235 + 0.21499085 \\ & \approx 0.37502458 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür das weniger als 4 Personen die Blutgruppe 0 haben, ist ca. 37.5 %.

b) Unter der Annahme, dass 90 % einen positiven Rhesusfaktor besitzen, ist $p = 0.4 \cdot 0.9 = 0.36$ und $q = 1 - p = 0.64$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k < 3 \quad n = 10 \quad p = 0.36 \quad q = 0.64$

$$\begin{aligned} P(X < 3) = & \binom{10}{0} (0.36)^0 (0.64)^{10} + \binom{10}{1} (0.36)^1 (0.64)^9 \\ & + \binom{10}{2} (0.36)^2 (0.64)^8 \\ & = 0.011529214 + 0.06485182 + 0.164156175 \\ & \approx 0.240537209 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür das weniger als 3 Personen die Blutgruppe 0+ haben, ist ca. 24.05 %.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Zuerst einmal wird bestimmt welchen Wert p hat, d.h. die Wahrscheinlichkeit Rhesus negativ zu sein. $p = 1 - 0.37 - 0.35 - 0.09 - 0.04 = 0.15$ und $q = 1 - p = 0.85$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 1 \quad n = 10 \quad p = 0.15 \quad q = 0.85$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{10}{1} (0.15)^1 (0.85)^9 \\ &= 10 \cdot 0.15 \cdot 0.85^9 \\ &\approx 0.34742542 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt ca. 34.74 %.

b)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k < 2 \quad n = 10 \quad p = 0.15 \quad q = 0.85$

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= \binom{10}{0} (0.15)^0 (0.85)^{10} + \binom{10}{1} (0.15)^1 (0.85)^9 \\ &= 1 \cdot 0.85^{10} + 10 \cdot 0.15 \cdot 0.85^9 \\ &\approx 0.1968744 + 0.34742542 \\ &\approx 0.54429982 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt ca. 54.4 %, es ist also wahrscheinlicher “weniger als 2“ als “2 oder mehr“ zu finden.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist $p = 18/35$ und die Anzahl n ist 3, die gesuchte Anzahl Knaben k ist 1.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 1 \quad n = 3 \quad p = 18/35 \quad q = 17/35$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{3}{1} (p)^1 (1-p)^2 \\ &= \binom{3}{1} \frac{18}{35} \left(\frac{17}{35}\right)^2 \\ &= 3 \cdot 0.12132945 \\ &= 0.36398834 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt ca. 36.4 %.

b)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 3 \quad n = 3 \quad p = 18/35 \quad 1 - p = q = 17/35$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{3}{3} \left(\frac{18}{35}\right)^3 \left(\frac{17}{35}\right)^0 \\ &= 1 \cdot \left(\frac{18}{35}\right)^3 \cdot 1 \\ &= 0.13602332 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit das alle drei Kinder Knaben sind beträgt ca. 13.6 %.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist $p = 18/35$ und die Anzahl n ist 6, die gesuchte Anzahl Knaben $k = i$ mit $i = 0, \ldots 6$. Insgesamt müssen hier also sieben Werte berechnet werden.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} \left(\frac{18}{35}\right)^0 \left(\frac{17}{35}\right)^6 \approx 0.01313062$$

$$P(X = 1) = \binom{6}{1} \left(\frac{18}{35}\right)^1 \left(\frac{17}{35}\right)^5 \approx 0.08341806$$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{18}{35}\right)^2 \left(\frac{17}{35}\right)^4 \approx 0.22081251$$

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} \left(\frac{18}{35}\right)^3 \left(\frac{17}{35}\right)^3 \approx 0.3117353$$

$$P(X = 4) = \binom{6}{4} \left(\frac{18}{35}\right)^4 \left(\frac{17}{35}\right)^2 \approx 0.24755451$$

$$P(X = 5) = \binom{6}{5} \left(\frac{18}{35}\right)^5 \left(\frac{17}{35}\right)^1 \approx 0.104846616$$

$$P(X = 6) = \binom{6}{6} \left(\frac{18}{35}\right)^6 \left(\frac{17}{35}\right)^0 \approx 0.018502344$$

b) Das Histogramm ähnelt der Normalverteilung.

Quelle: Stochastik

Mit freundlicher Unterstüzung von: http://www.moebel-zeit.com/