Hypergeometrische Verteilung

Aufgaben

Aufgabe 1
Eine Firma produziert insgesamt 350 elektronische Bauteile des gleichen Typs. Aus langjähriger Erfahrung weiß man das davon jedes 70te defekt ist. Um die Qualität zu prüfen untersucht der Käufer der Bauteile eine Stichprobe. Dazu werden zufällig 20 Bauteile heraus genommen und untersucht. Wenn mehr als ein defektes Bauteil gefunden wird, wird die Sendung zurückgeschickt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Warensendung wieder zurück geschickt wird?

Aufgabe 2
Eine Firma produziert insgesamt 200 elektronische Bauteile des gleichen Typs. Aus Erfahrung weiß man das 1 % defekt sind. Um die Qualität zu prüfen untersucht der Käufer der Bauteile eine Stichprobe. Dazu werden zufällig 20 Bauteile heraus genommen und untersucht. Wenn mehr als ein defektes Bauteil gefunden wird, wird die Sendung zurückgeschickt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Warensendung wieder zurück geschickt wird?

Aufgabe 3
Eine Firma produziert insgesamt 100 Bauteile des gleichen Typs. Davon sind 10 % defekt. Da unter den verkauften auch die defekten Bauteile sind, prüft der Käufer mittels einer Stichprobe die Qualität der Warensendung. Dazu werden zufällig 10 Bauteile heraus genommen und untersucht. Wenn mindestens ein defektes Bauteil gefunden wird, wird die Sendung zurückgeschickt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Warensendung wieder zurück geschickt wird?

Aufgabe 4
In einer Urne befinden sich 16 weiße und 8 rote Kugeln. Es werden 5 Kugeln ohne zurücklegen gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine rote Kugel dabei ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 4 weiße Kugeln gezogen werden?

Aufgabe 5
In einer Urne befinden sich 4 grüne, 8 rote, 7 gelbe und 5 weiße Kugeln. Es werden 5 Kugeln ohne zurücklegen gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine rote Kugel dabei ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 4 weiße Kugeln gezogen werden?

Lösung

Aufgabe 1

350 elektronische Bauteile von denen 5 (= 350 / 70) defekt sind und 345 funktionieren. Stichprobe im Umfang von 20 Stück.

Hypergeometrische Verteilung
$N = 350 \quad M = 5 \quad n = 20 \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$h_{(k|N,M,n)} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, ob mehr als 1 defektes Bauteil in der Stichprobe sind, wird zuerst die Wahrscheinlichkeit das kein defektes enthalten ist bestimmt. Und anschliesend die Wahrscheinlichkeit das genau ein defektes enthalten ist. Diese zwei Wahrscheinlichkeiten werden von der Gesamtwahrscheinlichkeit (=1) abgezogen und man erhält die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

$$h_{(0|350,5,20)} = \frac{\binom{5}{0}\binom{345}{20}}{\binom{350}{20}} = \frac{345!}{20! \cdot 325!} \cdot \frac{20! \cdot 330!}{350!} \approx 0.74382$$

$$h_{(1|350,5,20)} = \frac{\binom{5}{1}\binom{345}{19}}{\binom{350}{20}} = 5 \cdot \frac{345!}{19! \cdot 326!} \cdot \frac{20! \cdot 330!}{350!} \approx 0.22817$$

$$\begin{aligned} P(k > 1) &= 1 - P(k = 0) - P(k = 1) \\ &\approx 1 - 0.74382 - 0.22817 \\ &\approx 0.02801 \approx 2.8\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung zurückgesandt wird beträgt ca. 2,8 %.

Aufgabe 2

200 elektronische Bauteile von denen 2 (= 1% von 200) defekt sind und 198 funktionieren. Stichprobe im Umfang von 20 Stück.

Hypergeometrische Verteilung
$N = 200 \quad M = 2 \quad n = 20 \quad k \in \{0, 1, 2\}$

$$h_{(k|N,M,n)} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, ob mehr als 1 defektes Bauteil in der Stichprobe sind, wird zuerst die Wahrscheinlichkeit das kein defektes enthalten ist bestimmt. Und anschliesend die Wahrscheinlichkeit das genau ein defektes enthalten ist. Diese zwei Wahrscheinlichkeiten werden von der Gesamtwahrscheinlichkeit (=1) abgezogen und man erhält die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

$$h_{(0|200,2,20)} = \frac{\binom{2}{0}\binom{198}{20}}{\binom{200}{20}} = \frac{198!}{20! \cdot 178!} \cdot \frac{20! \cdot 180!}{200!} \approx 0.80955$$

$$h_{(1|200,2,20)} = \frac{\binom{2}{1}\binom{198}{19}}{\binom{200}{20}} = 2 \cdot \frac{198!}{19! \cdot 179!} \cdot \frac{20! \cdot 180!}{200!} \approx 0.18090$$

$$\begin{aligned} P(k > 1) &= 1 - P(k = 0) - P(k = 1) \\ &\approx 1 - 0.80955 - 0.1809 \\ &\approx 0.0096 = 0.96\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung zurückgesandt wird beträgt ca. 0,96 %.

Aufgabe 3

100 Bauteile von denen 10 ($= 10\%$ von 100) defekt sind und 90 funktionieren. Stichprobe im Umfang von 10 Stück.

Hypergeometrische Verteilung
$N = 100 \quad M = 10 \quad n = 10 \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$

$$h_{(k|N,M,n)} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$h_{(0|100,10,10)} = \frac{\binom{10}{0}\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{90!}{10! \cdot 80!} \cdot \frac{10! \cdot 90!}{100!} \approx 0.330476$$

$$\begin{aligned} P(k > 0) &= 1 - P(k = 0) \\ &\approx 1 - 0.330476 \\ &\approx 0.669524 = 66.95\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung zurückgesandt wird beträgt ca. 66,95 %.

Aufgabe 4

a) Die Urne enthält insgesamt 24 Kugeln, N = 24. 8 Kugel sind rot, M = 8. Gezogen werden 5 Stück, n = 5 und keine soll rot sein k = 0.

$$h_{(k|N,M,n)} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\begin{aligned} h_{(0|24,8,5)} &= \frac{\binom{8}{0}\binom{16}{5}}{\binom{24}{5}} \\ &= \frac{\frac{16!}{5!\cdot 11!}}{\frac{24!}{5!\cdot 19!}} \\ &= \frac{16!}{5!\cdot 11!}\cdot\frac{5!\cdot 19!}{24!} \\ &= \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20} \\ &\approx 0{,}1027668 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine rote Kugel gezogen wurde ist ca. 10,28 %.

b) Die Urne enthält insgesamt 24 Kugeln, N = 24. 8 Kugel sind rot, M = 8. Gezogen werden 5 Stück, n = 5 und genau 1 soll davon rot k = 1.

$$h_{(k|N,M,n)} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\begin{aligned} h_{(0|24,8,5)} &= \frac{\binom{8}{1}\binom{16}{4}}{\binom{24}{5}} \\ &= \frac{8\cdot\frac{16!}{4!\cdot 12!}}{\frac{24!}{5!\cdot 19!}} \\ &= \frac{8\cdot 16!}{4!\cdot 12!}\cdot\frac{5!\cdot 19!}{24!} \\ &\approx 0{,}34255599 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine rote Kugel (und damit genau 4 weiße) gezogen wurde ist ca. 34,26 %.

Aufgabe 5

a) Die Aufgabe lässt sich wie Aufgabe 4 lösen. Dazu definiert man, dass alle Kugeln die nicht rot sind, ab jetzt als weiß bezeichnet werden.

Die Urne enthält insgesamt 24 Kugeln, N = 24. 8 Kugel sind rot, M = 8. Gezogen werden 5 Stück, n = 5 und keine soll rot sein k = 0.

$$h_{(k|N,M,n)} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\begin{aligned} h_{(0|24,8,5)} &= \frac{\binom{8}{0}\binom{16}{5}}{\binom{24}{5}} \\ &= \frac{\frac{16!}{5!\cdot 11!}}{\frac{24!}{5!\cdot 19!}} \\ &= \frac{16!}{5!\cdot 11!}\cdot\frac{5!\cdot 19!}{24!} \\ &= \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20} \\ &\approx 0,1027668 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine rote Kugel gezogen wurde ist ca. 10,28 %.

b) Die Urne enthält insgesamt 24 Kugeln, N = 24. 5 Kugel sind weiß, M = 5. Gezogen werden 5 Stück, n = 5 und genau 4 soll davon weiß sein k = 4.

$$h_{(k|N,M,n)} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\begin{aligned} h_{(0|24,8,5)} &= \frac{\binom{5}{4}\binom{19}{1}}{\binom{24}{5}} \\ &= \frac{5\cdot 19}{42504} \\ &\approx 0,0022351 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 4 weiße gezogen wurde ist ca. 0,22 %.

Quelle: Stochastik
Mit freundlicher Unterstüzung von: http://www.moebel-zeit.com/