Inklusion und Exklusion

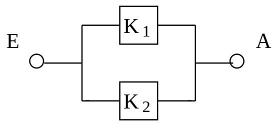
Aufgaben

Aufgabe 1:
Wie groß ist die Anzahl der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 100
(jeweils einschließlich), die weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind?

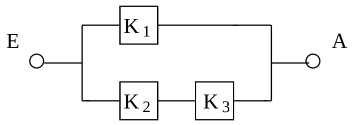
Aufgabe 2:
Wie groß ist die Anzahl der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 100
(jeweils einschließlich), die weder durch 3 noch durch 5 teilbar sind?

Aufgabe 3:
Wie groß ist die Anzahl der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 100
(jeweils einschließlich), die nicht durch 2, nicht durch 3 und nicht durch 5 teilbar sind?

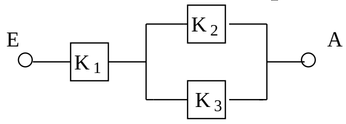
Aufgabe 4:
Das unten skizzierte System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft, d.h. es fällt aus wenn beide Komponente K_1 und K_2 ausfallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System, falls jede Komponente unabhängig von der anderen mit einer Wahrscheinlichkeit p funktioniert?



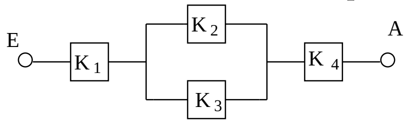
Aufgabe 5:
Das unten skizzierte System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft, d.h. es fällt aus wenn die Komponente K_1 sowie zusätzliche mindestens eine der Komponenten K_2 und K_3 ausfallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System, falls jede Komponente unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit p funktioniert?



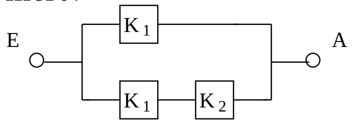
Aufgabe 6:
Das unten skizzierte System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft, d.h. es fällt aus wenn die Komponente K_1 oder die beiden Komponenten K_2 und K_3 ausfallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System, falls jede Komponente unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit p funktioniert?



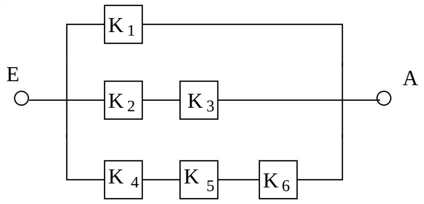
Aufgabe 7:
Das unten skizzierte System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft, d.h. es fällt aus wenn einer der Komponenten K_1 und K_4 oder die beiden Komponenten K_2 und K_3 ausfallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System, falls jede Komponente unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit p funktioniert?



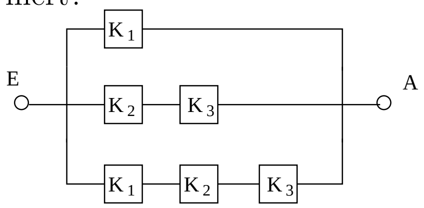
Aufgabe 8:
Das unten skizzierte System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft. Alle Komponenten des gleichen Typs fallen immer gleichzeitig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System, falls jeder Komponententyp unabhängig von dem anderen mit einer Wahrscheinlichkeit p funktioniert?



Aufgabe 9:
Das unten skizzierte System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft, d.h. es fällt aus wenn die Komponenten K_1 und mindestens eine der Komponenten K_2 und K_3 sowie zusätzlich mindestens eine der drei Komponenten K_4,K_5 und K_6 ausfallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System, falls jede Komponente unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit p funktioniert?



Aufgabe 10:
Das unten skizzierte System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft. Alle Komponenten des gleichen Typs fallen immer gleichzeitig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System, falls jeder Komponententyp unabhängig von dem anderen mit einer Wahrscheinlichkeit p funktioniert?



Lösungen

Aufgabe 1:
Mit $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$und $A_1 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 2 $\} = \{2, 4, ..., 100\}$, und
$A_2 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 3 $\} = \{12, 15, ..., 99\}$,
folgt $A_1 \cap A_2 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 2 und durch 3, also durch 6 $\}$
$= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$.
Für die Mächtigleiten dieser Mengen gilt
$|S| = 100\, |A_1| = 50\,, |A_2| = 33\, |A_1 \cap A_2| = 16$.
Nach dem Prinzip der Inklusion und Exklusion erhält man somit für die gesucht Anzahl
$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = 100 - 50 - 33 + 16 = 33$

Aufgabe 2:
Mit $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ und $A_1 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 3 $\} = \{3, 6, ..., 99\}$
und $A_2 = \{x|x \in S$, x ist durch 5 teilbar$\} = \{5, 10, ..., 100\}$
folgt $A_1 \cap A_2 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 3 und durch 5, also durch 15$\} = \{15, 30, ..., 90\}$
Für die Mächtigkeiten dieser Mengen gilt
$|S| = 100 \quad |A_1| = 33 \quad |A_2| = 20 \quad |A_1 \cap A_2| = 6$
Nach dem Prinzip der Inklusion und Exklusion erhält man somit das für die gesuchte Anzahl
$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = 100 - 33 - 20 + 6 = 53$

Aufgabe 3:
Mit $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$und $A_1 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 2 $\} = \{2, 4, ..., 100\}$, und
$A_2 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 3 $\} = \{12, 15, ..., 99\}$, und
$A_3 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 5 $\} = \{15, 20, ..., 95\}$ folgt
$A_1 \cap A_2 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 2 und durch 3 , also durch 6$\} =$
$\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$.
$A_1 \cap A_3 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 2 und durch 5 , also durch 10$\} =$
$\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$.
$A_2 \cap A_3 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 3 und durch 5 , also durch 15$\} =$
$\{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$.
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x|x \in S$, x ist teilbar durch 2, durch 3 und durch 5 , also durch 30 $\} =$
$\{30, 60, 90\}$

Die entsprechenden Mächtigkeiten sind
$|S| = 100$, $|A_1| = 50$, $|A_2| = 33$, $|A_3| = 20$
$|A_1 \cap A_2| = 16 \quad |A_1 \cap A_3| = 10 \quad |A_2 \cap A_3| = 6$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$
Nach dem Prinzip der Inklusion und Exklusion erhält man somit für die gesucht Anzahl

$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 100 - (50 + 33 + 20) + (16 + 10 + 6) - 3 = 26$

Aufgabe 4:
Sei A_i das Ereignis, dass Komponente i funktioniert, für $i = 1, 2$. Dann ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(EA)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} P(EA) &= P(A_1 \cup A_2) \\ \text{Siebformel} & \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ p_i &= p \\ &= 2p - p^2 \end{aligned}$$

Die gesucht Wahrscheinlichkeit ist $2p - p^2$.

Aufgabe 5:
Sei A_i das Ereignis, dass Komponente i funktioniert, für $i = 1, 2, 3$.
Und weiter sei $B_1 := A_1 \quad B_2 := A_2 \cap A_3$. Dann ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(EA)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} P(EA) &= P(B_1 \cup B_2) \\ \text{Siebformel} & \\ &= P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) \\ p_i &= p \\ &= p + p^2 - p^3 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p + p^2 - p^3$ funktioniert das System.

Aufgabe 6:
Sei A_i das Ereignis, dass Komponente i funktioniert, für $i = 1, 2, 3$.
Und weiter sei $B_1 := A_1 \cap A_2 \quad B_2 := A_1 \cap A_3$. Dann ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(EA)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} P(EA) &= P(B_1 \cup B_2) \\ \text{Siebformel} & \\ &= P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \\ &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)) \\ &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ p_i &= p \\ &= p^2 + p^2 - p^3 \\ &= 2p^2 - p^3 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p + p^2 - p^3$ funktioniert das System.

Aufgabe 7:
Sei A_i das Ereignis, dass Komponente i funktioniert, für $i = 1, \ldots, 4$.
Und weiter sei $B_1 := A_1 \cap A_2 \cap A_4 \quad B_2 := A_1 \cap A_3 \cap A_4$. Dann ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(EA)$ wie folgt:

$$
\begin{array}{rcl}
P(EA) & = & P(B_1 \cup B_2) \\
\text{Siebformel} & & \\
& = & P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \\
& = & P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) - P((A_1 \cap A_2 \cap A_4) \cap (A_1 \cap A_3 \cap A_4)) \\
& = & P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
p_i & = & p \\
& = & p^3 + p^3 - p^4 \\
& = & 2p^3 - p^4
\end{array}
$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $2p^3 - p^4$ funktioniert das System.

Aufgabe 8:
Sei A_i das Ereignis, dass Komponente i funktioniert, für $i = 1, 2$.
Und weiter sei $B_1 := A_1 \quad B_2 := A_1 \cap A_2$. Dann ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(EA)$ wie folgt:

$$
\begin{array}{rcl}
P(EA) & = & P(B_1 \cup B_2) \\
\text{Siebformel} & & \\
& = & P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \\
& = & P(A_1) + P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap (A_1 \cap A_2)) \\
& = & P(A_1) + P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\
& = & P(A_1) \\
p_i & = & p \\
& = & p
\end{array}
$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von p funktioniert das System.

Aufgabe 8:
Sei A_i das Ereignis, dass Komponente i funktioniert, für $i = 1, \ldots 6$.
Und weiter sei $B_1 := A_1 \quad B_2 := A_2 \cap A_3 \quad B_3 := A_4 \cap A_5 \cap A_6$. Dann ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(EA)$ wie folgt:

$$
\begin{array}{rcl}
P(EA) & = & P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \\
\text{Siebformel} & & \\
& = & P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) \\
& & -P(B_1 \cap B_2) \\
& & -P(B_1 \cap B_3) \\
& & -P(B_2 \cap B_3) \\
& & +P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \\
& = & P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) + P(A_4 \cap A_5 \cap A_6) \\
& & -P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) \\
& & -P(A_1 \cap (A_4 \cap A_5 \cap A_6)) \\
& & -P((A_2 \cap A_3) \cap (A_4 \cap A_5 \cap A_6)) \\
& & +P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \cap (A_4 \cap A_5 \cap A_6)) \\
p_i & = & p \\
& = & p + p^2 + p^3 - p^3 - p^4 - p^5 + p^6 \\
& = & p + p^2 - p^4 - p^5 + p^6
\end{array}
$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p + p^2 - p^4 - p^5 + p^6$ funktioniert das System.

Aufgabe 9:
Sei A_i das Ereignis, dass Komponente i funktioniert, für $i = 1, 2, 3$.

Und weiter sei $B_1 := A_1 \quad B_2 := A_2 \cap A_3 \quad B_3 := A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Dann ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(EA)$ wie folgt:

$$
\begin{array}{rcl}
P(EA) & = & P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \\
\text{Siebformel} & & \\
& = & P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) \\
& & -P(B_1 \cap B_2) \\
& & -P(B_1 \cap B_3) \\
& & -P(B_2 \cap B_3) \\
& & +P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \\
& = & P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
& & -P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) \\
& & -P(A_1 \cap (A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\
& & -P((A_2 \cap A_3) \cap (A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\
& & +P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \cap (A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\
& = & P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
& & -P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
& & -P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
& & -P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
& & +P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
& = & P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
p_i & = & p \\
& = & p + p^2 - p^3
\end{array}
$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p + p^2 - p^3$ funktioniert das System.

Quelle: Stochastik

Mit freundlicher Unterstüzung von: http://www.moebel-zeit.com/