Laplace und Gleichverteilung

Aufgaben

Aufgabe 1
An einem Computer, dessen Tastatur die 26 Tasten für die kleinen Buchstaben (a,b,c …z) hat, sitzt ein Nutzer (User) und tippt zufällige auf den Tasten herum. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er das Wort "passwort" tippt?

Aufgabe 2
Sie und ein Bekannter spielen gemeinsam ein Abwandlung des Spiels Schach. Dabei hat jeder Spieler nur einen Turm als Spielfigur, und beide Spieler platzieren zeitgleich und zufällig die zwei Türme auf dem Schachbrett. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das sie sich schlagen können?

Aufgabe 3
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die vierstellige Zahl, die entsteht wenn die Ziffern 1,3,5 und 9 in zufälliger und jeweils verschiedene Reihenfolge notiert werden, durch 3,6 und 9 teilbar ist?

Aufgabe 4
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die vierstellige Zahl, die entsteht wenn die Ziffern 3,5,7 und 9 in zufälliger und jeweils verschiedene Reihenfolge notiert werden, durch 3,5 und 9 teilbar ist?

Aufgabe 5
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die fünfstellige Zahl, die entsteht wenn die Ziffern 2,3,4,5 und 6 in zufälliger und jeweils verschiedene Reihenfolge notiert werden, durch 2,3 und 4 teilbar ist?

Aufgabe 6
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die fünfstellige Zahl, die entsteht wenn die Ziffern 0,1,2,3 und 4 in zufälliger und jeweils verschiedene Reihenfolge notiert werden, durch 4,5 und 8 teilbar ist?

Aufgabe 7
Um die Vergabe der Benutzernamen gerechter zu gestalten, wird nicht mehr die Nachname als Benutzername vergeben, sondern eine siebenstellige Zahl. Die Zahl enthält in zufälliger Reihenfolge die Ziffern 2,3,4,5,6,7,8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die so entstanden Zahlen durch 2,3,4 und 5 teilbar sind?

Aufgabe 8
Sie spielen ein bekanntes Würfelspiel, mit fünf Würfeln. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie mindestens vier Sechsen gewürfelt haben? Geben Sie das Modell vollständig an.

Aufgabe 9
Angeblich soll Chevalier de Mèrè im Jahre 1654 Blaise Pascal folgendes Problem gestellt haben:
Stimmt die Chance, in vier Würfen eines Würfels eine Sechs zu werfen, mit der Chance überein, in 24 Würfen zweier Würfel mindestens eine Doppelsechs zu werfen?

a) Berechnen Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten.

b) Welche ist größer?

Aufgabe 10
Sie würfeln zweimal mit einem fairen Würfel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die Augensumme 7 auf?

Aufgabe 11
Anstelle mit einem Würfel zweimal zu würfeln, würfeln Sie diesmal mit zwei nicht unterscheidbaren Würfel gleichzeitig. Warum irrte sich Leibniz, als er glaubte, dass beim Werfen mit zwei nicht unterscheidbare Würfel die Augensummen 11 und 12 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten?

Aufgabe 12
Sie würfeln einmal mit fünf Würfeln. Wie wahrscheinlich ist es, daß Sie fünf aufeinander folgende Zahlen gewürfelt haben? Geben Sie das Modell vollständig an.

Aufgabe 13
Geben Sie einen geeigneten Grundraum an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim viermaligen Werfen eines Würfels.

a) das Maximum der erhaltenen Augenzahlen kleiner oder gleich 4 ist,

b) das Maximum der erhaltenen Augenzahlen gleich 4 ist,

c) das Minimum der erhaltenen Augenzahlen kleiner oder gleich 4 ist.

Aufgabe 14
Sie würfeln mit vier Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit vier verschiedene Augenzahlen zu erhalten?

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1
$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_8)|\omega_i \in \{1, ..., 26\}, 1 \leq i \leq 8\}$
A = "passwort" = $\{(16, 1, ..., 20)\}$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{26^8}$

Lösung zu Aufgabe 2
$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_4)|\omega_i \in \{1, ..., 8\}\, 1 \leq i \leq 8\,;\, (\omega_1, \omega_2) \neq (\omega_3, \omega_4)\}$
$|\Omega| = 8^4 - 8^2$
$A = \{\omega \in \Omega | \omega_1 = \omega_3 \vee \omega_2 = \omega_4\}$
$|A| = 64 \cdot 7 + 64 \cdot 7 = 8^2 \cdot 14$
$\Rightarrow P(A) = \frac{8^2 \cdot 14}{8^4 - 8^2} = \frac{14}{63} = \frac{2}{9}$

Lösung zu Aufgabe 3

- Anzahl der verschiedenen Reihenfolgen von 1,3,5,9 = 4!
- Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Hier beträgt die Quersumme $1 + 3 + 5 + 9 = 18$ und da diese für möglichen Zahlen gleich ist, ist jede Zahl durch 3 teilbar
$\Rightarrow$ P("Zahl durch drei teilbar") = 1.
- Damit eine Zahl durch 6 teilbar ist, muss die Zahl gerade sein und ihre Quersumme durch 3 teilbar sein. Da keine der möglichen Zahlen gerade ist, ist auch keine durch 6 teilbar $\Rightarrow$ P("Zahl durch sechs teilbar") = 0.
- Wenn die Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar ist, ist auch diese Zahl durch 9 teilbar. Die Quersumme ist hier 18, d.h. alle Zahlen sind durch 9 teilbar $\Rightarrow$ P("Zahl durch neun teilbar") = 1.

Lösung zu Aufgabe 4
Anzahl der verschiedenen Reihenfolgen von 3,5,7,9 = 4!

Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Hier beträgt die Quersumme $3+5+7+9 = 24$ und da diese für möglichen Zahlen gleich ist, ist jede Zahl durch 3 teilbar $\Rightarrow$ P("Zahl durch drei teilbar") = 1.

Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 ist. Es gibt insgesamt 3! Möglichkeiten die ersten 3 Ziffern anzuordnen, daher gibt es $1 \cdot 3!$ mögliche Zahlen die durch 5 teilbar sind.
$\Rightarrow$ P("Zahl ist durch fünf teilbar") = $\frac{1 \cdot 3!}{4!} = \frac{1}{4}$

Da hier die Quersumme 24 nicht durch 9 teilbar ist, ist auch keine Zahl durch 9 teilbar $\Rightarrow$ P("Zahl durch neun teilbar") = 0.

Lösung zu Aufgabe 5
Anzahl der verschiedenen Reihenfolgen von 2,3,4,5,6 = 5!

Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar, d.h. jede Zahl die auf 2,4 oder 6 endet ist hier durch 2 teilbar. Mit der letzten Ziffer fest gibt es jeweils 4! Möglichkeiten die anderen Ziffern anzuordnen. Es gibt insgesamt $3 \cdot 4!$ Möglichkeiten für gerade Zahlen $\Rightarrow$ P("Zahl durch zwei teilbar") $= \frac{3 \cdot 4!}{5!} = \frac{3}{5}$.

Hier beträgt die Quersumme 20, d.h. die Zahl ist nicht durch 3 teilbar $\Rightarrow$ P("Zahl durch drei teilbar") = 0.

Eine Zahl ist dann durch 4 teilbar, wenn die letzten zwei Ziffern durch 4 teilbar sind, hier $\{24, 32, 36, 52, 56, 64\}$. Für die verbleibenden drei Stellen gibt es insgesamt 3! Möglichkeiten $\Rightarrow$ P("Zahl durch vier teilbar") $= \frac{6 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$.

Lösung zu Aufgabe 6
Anzahl der verschiedenen Reihenfolgen von 0,1,2,3,4 = 5!

Eine Zahl ist dann durch 4 teilbar, wenn die letzten zwei Ziffern durch 4 teilbar sind, hier $\{04, 12, 20, 24, 32, 40\}$ für die verbleibenden drei Stellen gibt es insgesamt 3! Möglichkeiten $\Rightarrow$ P("Zahl durch vier teilbar") $= \frac{6 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$.

Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 ist. Es gibt insgesamt 4! Möglichkeiten die ersten 4 Ziffern anzuordnen, daher gibt es $1 \cdot 4!$ mögliche Zahlen die durch 5 teilbar sind. P("Zahl ist durch fünf teilbar") $= \frac{1 \cdot 4!}{5!} = \frac{1}{5}$

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die letzten drei Ziffern durch 8 teilbar sind, hier $\{024, 032, 104, 120, 232, 240, 304, 312, 320, 432\}$ für die verbleibenden zwei Stellen gibt es insgesamt 2! Möglichkeiten $\Rightarrow$ P("Zahl durch acht teilbar") $= \frac{10 \cdot 2!}{5!} = \frac{1}{6}$.

Lösung zu Aufgabe 7
Anzahl der verschiedenen Reihenfolgen von 2,3,4,5,6,7,8 = 7!
(a). Durch 2 teilbare Zahlen sind genau die Zahlen, die auf 2,4,6 oder 8 enden.
Mit einer dieser Ziffern fest am Ende gibt es jeweils 6! Möglichkeiten die anderen Ziffern anzuordnen. Es gibt insgesamt $4 \cdot 6!$ Möglichkeiten für gerade Zahlen. Jedes Ergebnis ist gleichwahrscheinlich.
$\Rightarrow P(\text{"Zahl durch zwei teilbar"}) = \frac{4 \cdot 6!}{7!} = \frac{4 \cdot 6!}{7 \cdot 6!} = \frac{4}{7}$
(b). Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Da $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35$ nicht durch 3 teilbar ist, ist auch keine der Kombinationen durch 3 teilbar.$\Rightarrow P(\text{"Zahl durch drei teilbar"}) = 0$
(c). Eine Zwei- oder mehrstellige Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die letzten zwei Ziffern durch 4 teilbar sind.
Hier $\{24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84\}$
Für die restlichen Ziffern bleiben somit 5! Möglichkeiten es gibt dann insgesamt $12 \cdot 5!$ Möglichkeiten $\Rightarrow P(\text{"Zahl durch 4 teilbar"}) = \frac{12 \cdot 5!}{7!} = \frac{2 \cdot 6!}{7 \cdot 6!} = \frac{2}{7}$
(d) Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 ist. Es gibt insgesamt 6! Möglichkeiten die ersten 6 Ziffern anzuordnen, daher gibt es $1 \cdot 6!$

mögliche Zahlen die durch 5 teilbar sind. P("Zahl ist durch fünf teilbar") $= \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$

Lösung zu Aufgabe 8
$\Omega = \{(i,j,k,l,m)|1 \leq i,j,k,l,m \leq 6\} =$
$\{(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,2),...,(6,6,6,6,1),(6,6,6,6,2),...,(6,6,6,6,6)\}$
$|\Omega| = 6^5$

$A = \{(6,6,6,6,1),(6,6,6,6,2),(6,6,6,6,3),(6,6,6,6,4),(6,6,6,6,5),(6,6,6,6,6)\}$
$|A| = 6$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{6^4}$

Lösung zu Aufgabe 9
(a1)
$\Omega = \{1,...,6\}^4$
A = in 4 Würfen mindestens eine 6
Einfacher ist hier der Weg über das Gegenereignis:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - (\tfrac{5}{6})^4 \\ &= \tfrac{671}{1296} \\ &\approx 0.518 \end{aligned}$$

(a2)
$\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}^{24}$
A = in 24 Würfen mindestens eine Doppelsechs

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - (\tfrac{35}{36})^{24} \\ &\approx 0.491 \end{aligned}$$

(b) Die Wahrscheinlichkeit in 4 Würfen mindestens eine 6 zu würfeln, ist größer als die Wahrscheinlichkeit mindestens eine Doppelsechs in 24 Würfen zu bekommen.

Lösung zu Aufgabe 10
$\Omega = \{(i,j)\} : 1 \leq i,j \leq 6\}$

$$\begin{aligned} \Omega = \{&(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6); \\ &(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6); \\ &(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6); \\ &(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6); \\ &(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6); \\ &(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6);\} \end{aligned}$$

$|\Omega| = 36$
A bezeichnet das Ergebnis mit Augensumme gleich 7
$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Lösung zu Aufgabe 11
In dieser Aufgabe ist die Anzahl der unterscheidbaren Elementarergebnisse geringer als in der vorrangegangen Aufgabe.
Die Ergebnismenge Ω hat “nur noch” 21 Elemente.$|\Omega| = 21$

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,4)	(4,5)	(4,6)
				(5,5)	(5,6)
					(6,6)

Bei dieser Aufgabe handelt es sich nicht um ein Laplace-Modell, da z.B. die Augensummen 11 und 12 nicht mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.
Nehmen wir an, einer der Würfel sei rot, und der andere sei grün.
Für eine farbenblinde Person sind die zwei Würfel nicht unterscheidbar.
Für eine nicht farbenblinde Person ist es wie in Aufgabe 6.

Lösung zu Aufgabe 12
$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)|\omega_i \in \{1, \ldots, 6\}$ für $i = 1, \ldots, 5\}$
$|\Omega| = 6^5$

$$\begin{aligned} A &= \{(a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5)|a_j \in \{1,2,3,4,5\} \text{ für } j = 1, \ldots, 5 \cap \\ &\quad (a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5)|a_k \in \{2,3,4,5,6\} \text{ für } k = 1, \ldots, 5\} \end{aligned}$$

$|A| = 2 \cdot 5!$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 5!}{6^5} = \frac{5}{162} \approx 0.0309$

Lösung zu Aufgabe 13

$\Omega = ((\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \mid \omega_i \in A, i \in \{1, \ldots, 4\}))$

A = { 1,. . . ,6}

(a)

B = Maximum der Augenzahl ist kleiner oder gleich 4

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\omega_i \leq 4, i = \{1,2,3,4\}) \\ &= (\tfrac{4}{6})^4 \\ &= (\tfrac{2}{3})^4 = \tfrac{16}{81} \approx 0.1975 \end{aligned}$$

(b)

C = Maximum ist gleich 4

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\omega_i \leq 4\ \forall i\ , \omega_i = 4 \text{ für mind. ein i }) \\ &= 1 - P(\omega_i > 4 \text{ für mind. ein i}) - P(\omega_i < 4 \forall\ i) \\ &= 1 - (1 - P(\omega_i \leq 4 \forall\ i)) - P(\omega_i < 4 \forall\ i) \\ &= P(\omega_i \leq 4 \forall\ i) - P(\omega_i < 4 \forall\ i) \\ &= \tfrac{16}{81} - (\tfrac{1}{2})^4 \\ &= \tfrac{16}{81} - \tfrac{1}{16} \approx 0.135 \end{aligned}$$

(c)

D = Minimum ist kleiner oder gleich 4

$$\begin{aligned} P(D) &= P(\omega_i \leq 4 \text{ für mind. ein i}) \\ &= 1 - P(\omega_i > 4 \forall\ i) \\ &= 1 - (\tfrac{2}{6})^4 \\ &= 1 - \tfrac{1}{81} \\ &= \tfrac{80}{81} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 14

Der hier betrachtete Grundraum ist $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}^4$

$\mid \Omega \mid = 6^4$

Das gesuchte Ereignis $A :=$ { alle Würfe mit vier verschiedenen Augenzahlen }.

Man hat $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten die vier auftretenden Augenzahlen festzulegen.

Und 4! Möglichkeiten die Augenzahlen den einzelnen Würfeln zuzuweisen.

$\mid A \mid = \binom{6}{4} \cdot 4! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{5}{18}$

Alternativ ließe sich die Wahrscheinlichkeit auch direkt berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit das der erste Würfel eine noch nicht gewürfelt Zahl würfelt ist 1, die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Würfel nicht die gleiche Zahl wie der erste würfelt ist $\frac{5}{6}$, ... usw.

$P(A) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6}$

$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{18}$

Quelle: Stochastikaufgaben mit Lösungen

Mit freundlicher Unterstützung von: und http://www.gogirlglow.de