Permutation und Kombination

Aufgaben

Aufgabe 1
Wie viele verschiedene “Wörter” lassen sich durch Umstellen der Buchstaben aus den Wörtern

a. Mississippi,

b. Larissa,

c. Stuttgart,

d. Abrakadabra,

e. Thorsten,

f. Matthias bilden?

Aufgabe 2
Aus einer Urne mit 4 Kugeln werden 3 gezogen. Geben Sie die entsprechenden Grundräume an, wenn die Ziehung durch

(a) Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

(b) Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

(c) Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

(d) Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

erfolgt. Ermitteln Sie die jeweilige Mächtigkeiten.

Aufgabe 3
i) Aus einer Urne mit 5 Kugeln werden 2 gezogen.
ii)Aus einer Urne mit 5 Kugeln werden 4 gezogen.
iii)Aus einer Urne mit 6 Kugeln werden 3 gezogen.
iv)Aus einer Urne mit 6 Kugeln werden 2 gezogen.

Geben Sie die entsprechenden Grundräume an, wenn die Ziehung durch

(a) Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

(b) Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge

(c) Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

(d) Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

erfolgt. Ermitteln Sie die jeweilige Mächtigkeiten.

Aufgabe 4
Aus einer Urne mit 1 roten und 1 schwarzen Kugel und aus einer Urne mit 1 roten und 1 schwarzen Kugel werden gleichzeitig und rein zufällig je eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die gezogenen Kugeln die gleiche Farbe besitzen?

Aufgabe 5
a) Aus einer Urne mit 2 roten und 1 schwarzen Kugeln und aus einer Urne mit 1 roten und 1 schwarzen Kugel ...
b) Aus einer Urne mit 2 roten und 1 schwarzen Kugel und aus einer Urne mit 1 roten und 2 schwarzen Kugeln ...
c) Aus einer Urne mit 4 roten und 4 schwarzen Kugeln und aus einer Urne mit 3 roten, 3 weißen und 3 schwarzen Kugeln...
...werden gleichzeitig und rein zufällig je eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die gezogenen Kugeln die gleiche Farbe besitzen?

Aufgabe 6
Aus einer Urne mit 2 roten und 2 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 3 Kugel die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeichen das Ereignis, dass sich unter diesen 3 Kugeln genau k rote Kugeln befinden (k = 0,1,2,3).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Aufgabe 7
Aus einer Urne mit 2 roten und 2 schwarzen Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 2 Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeiche das Ereignis, dass sich unter diesen 2 Kugeln genau k rote Kugeln befinden (k = 0,1,2).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Aufgabe 8
Aus einer Urne mit 2 roten und 4 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 3 Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeiche das Ereignis, dass sich unter diesen 3 Kugeln genau k rote Kugeln befinden (k = 0,1,2,3).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Aufgabe 9
Aus einer Urne mit 3 roten und 4 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 3 Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeiche das Ereignis, dass sich unter diesen 3 Kugeln genau k rote Kugeln befinden (k = 0,1,2,3).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Aufgabe 10
Aus einer Urne mit 3 roten und 4 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 3 Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeiche das Ereignis, dass sich unter diesen 3 Kugeln genau k schwarze Kugeln befinden (k = 0,1,2,3).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Aufgabe 11
Aus einer Urne mit 2 roten und 5 schwarzen Kugeln werden nacheinander 3 Kugeln entnommen, wobei jede mögliche Auswahl von 3 Kugel die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen soll. A_k bezeiche das Ereignis, dass sich unter diesen 3 Kugeln genau k rote Kugeln befinden (k = 0,1,2,3).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse, wenn

(a) die jeweils entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird,

(b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Wie verändern sich die Wahrscheinlichkeiten, wenn sich in der Urne 4 rote und 10 schwarze Kugeln befinden?

Aufgabe 12
Wie zu Beginn jedes Semesters steht man auch in diesem vor dem Problem, das manche Übungstermine beliebter sind als andere. Um die Zuteilung zu den einzeln Gruppe so gerecht wie möglich zu gestalten werden die Student/innen zufällig den Gruppe zugeordnet. Dabei stellt sich die folgende Frage, wie viele mögliche Arten der Zuteilung gibt es, und macht es einen Unterschied ob die Gruppen unterscheidbar sind oder nicht? Auf wieviele Arten kann man 40 Student/innen in vier Übungsgruppen mit je zehn Personen einteilen, wenn die Gruppen

a) unterscheidbar sind?

b) nicht unterscheidbar sind?

Aufgabe 13
Eine Urne enthält 20 weiße und 10 schwarze Kugeln. Es wird eine Kugel zufällig herausgezogen und ihre Farbe notiert. Anschließend wird sie zusammen mit 5 weiteren Kugeln von derselben Farbe wieder in die Urne zurückgelegt. Dieses Verfahren wird 5 mal wiederholt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikationsformel die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei allen 5 Ziehungen eine weiße Kugel entnommen wird.

Aufgabe 14
Das Kartenspiel Skat wird i.d.R. zu dritt mit 32 Karten gespielt, dabei erhält jeder der drei Spieler zu beginn 10 Karten, die 2 überzähligen Karten bilden den Stock bzw. Skat. Da die Buben/Bauern beim normalen Spiel die obersten Trümpfe bilden und beim sog. reizen wichtig sind, ist es vorteilhaft wenn man wüsste wie sie verteilt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält

1. Spieler 1 genau zwei Buben ?
2. jeder der Spieler genau einen Buben ?

Aufgabe 15
Bei der alten Variante des Fußballtoto der 11er–Wette musste man bei 11 Spielen jeweils eine 0,1 oder 2 tippen. Inzwischen gibt es die 13er–Wette bei der bei 13 Spielen jeweils eine 0,1 oder 2 getippt werden.

a) Wie viele verschiedene Tippreihen gab es bei der 11er–Wette,
b) und wie viele gibt es bei der 13er–Wette?

Aufgabe 16
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Spielfeld, beim 6 aus 49 Lotto sechs Richtige (ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl) zu haben?

Aufgabe 17
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Spielfeld, bei der TOTO 6 aus 45 Auswahlwette drei Richtige (ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl) zu haben?

Aufgabe 18
Wie groß ist die die Wahrscheinlichkeit mit einem Spielfeld,

a) überhaupt einen Gewinn beim bisherigen alten 6 aus 49 Zahlenlotto,
b) bzw. bei der TOTO 6 aus 45 Auswahlwette zu erzielen?

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Mississippi hat 11 Buchstaben

M = 1 I = 4 S = 4 P = 2

$\frac{11!}{1!4!4!2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 5 = 32650$

(b) Larissa hat 7 Buchstabe

L = 1 A = 2 R = 1 I = 1 S = 2

$\frac{7!}{1!1!1!2!2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 1260$

(c) Stuttgart hat 9 Buchstaben

S = 1 T = 4 U = 1 G = 1 A = 1 R = 1

$\frac{9!}{1!4!1!1!1!1!} = \frac{9!}{4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$

(d) Abrakadabra hat 11 Buchstaben

A = 5 B = 2 R = 2 K = 1 D = 1

$\frac{11!}{5!2!2!1!1!} = 83160$

(e) Thorsten hat 8 Buchstaben

T = 2 H = 1 O = 1 R = 1 S = 1 E = 1 N = 1

$\frac{8!}{2!1!1!1!1!1!1!} = \frac{8!}{2!} = 20160$

(f) Matthias hat 8 Buchstaben

M = 1 A = 2 T = 2 H = 1 S = 1 I = 1

$\frac{8!}{1!2!2!1!1!1!} = \frac{8!}{2!2!} = 10080$

Lösung zu Aufgabe 2

a. $n^k = 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

b. $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 24$

c. $\binom{n+k-1}{k} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$

d. $\binom{n}{k} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)} = \frac{4!}{3!1!} = 4$

Lösung zu Aufgabe 3

i)

a. $n^k = 5^2 = 25$

b. $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$

c. $\binom{n+k-1}{k} = \binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

d. $\binom{n}{k} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

ii)

a. $n^k = 5^4 = 625$

b. $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5! = 120$

c. $\binom{n+k-1}{k} = \binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!} = 70$

d. $\binom{n}{k} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!1!} = 5$

iii)

a. $n^k = 6^3 = 218$

b. $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

c. $\binom{n+k-1}{k} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 56$

d. $\binom{n}{k} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\cdot 5 c\dot{4}}{3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6} = 20$

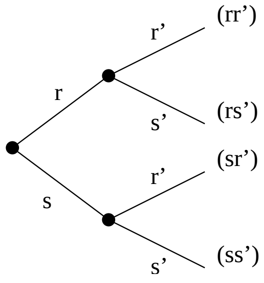
iv)
a. $n^k = 6^2 = 36$

b. $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

c. $\binom{n+k-1}{k} = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$

d. $\binom{n}{k} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$

Lösung zu Aufgabe 4
$\Omega_1 = \{s, r\} \quad |\Omega_1| = 2$
$\Omega_2 = \{s, r\} \quad |\Omega_2| = 2$
$\Omega_{\text{gesamt}} = \Omega_1 \times \Omega_2$
$|\Omega_g| = 2 \cdot 2 = 4$
4 Fälle und 2 günstige P(gleiche Farbe) $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



Lösung zu Aufgabe 5

a)

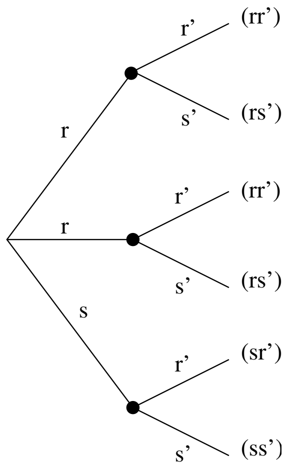
$\Omega_1 = \{s, r, r\} \quad |\Omega_1| = 3$

$\Omega_2 = \{s, r\} \quad |\Omega_2| = 2$

$\Omega_{\text{gesamt}} = \Omega_1 \times \Omega_2$

$|\Omega_g| = 3 \cdot 2 = 6$

6 Fälle und 3 günstige P(gleiche Farbe) $=\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$



b)

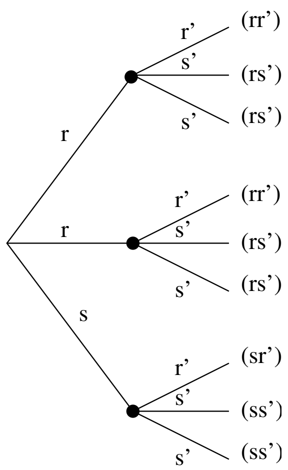
$\Omega_1 = \{s, r, r\} \quad |\Omega_1| = 3$

$\Omega_2 = \{s, s, r\} \quad |\Omega_2| = 3$

$\Omega_{\text{gesamt}} = \Omega_1 \times \Omega_2$

$|\Omega_g| = 3 \cdot 3 = 9$

9 Fälle und 4 günstige P(gleiche Farbe) $=\frac{4}{9}$



c)

$\Omega_1 = \{(s, s, s, s, r, r, r, r)\} \quad |\Omega_1| = 8$

$\Omega_2 = \{(s, s, s, r, r, r, w, w, w)\} \quad |\Omega_2| = 9$

$\Omega_{\text{gesamt}} = \Omega_1 \times \Omega_2$

$|\Omega_g| = 8 \cdot 9 = 72$

$P(\text{gleiche Farbe}) = \frac{(s \cdot s') + (r \cdot r')}{|\Omega_1| \cdot |\Omega_2|} = \frac{(4 \cdot 3) + (4 \cdot 3)}{8 \cdot 9}$

$P(\text{gleiche Farbe}) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$

Lösung zu Aufgabe 6

2 rote, 2 schwarze Kugeln n = r + s = 4 k = 3 $|\Omega| = 4^3$
(a)Mit Zurücklegen:
$A_0 = \{s, s, s\}$
$P(A_0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{8}{64}$

$A_1 = \{(r, s, s), (s, r, s), (s, s, r)\}$
$P(A_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{8}{64} + \frac{8}{64} + \frac{8}{64} = \frac{24}{64}$

$A_2 = \{(r, r, s), (s, r, r), (r, s, r)\}$
$P(A_2) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{24}{64}$

$A_3 = \{(r, r, r)\}$
$P(A_3) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{8}{64}$

(b)Ohne Zurücklegen:
$A_0 = \emptyset$
$P(A_0) = 0$

$A_1 = \{(r, s, s), (s, r, s), (s, s, r)\}$
$P(A_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A_2 = \{(r, r, s), (s, r, r), (r, s, r)\}$
$P(A_2) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A_3 = \emptyset$
$P(A_3) = 0$

Lösung zu Aufgabe 7
2 rote 2 schwarze Kugeln n = r + s = 4 k = 2 $|\Omega| = 4^2$
(a)Mit Zurücklegen:

$A_0 = \{(s, s)\}$
$P(A_0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{16}$

$A_1 = \{(r, s), (s, r)\}$
$P(A_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{8}{16}$

$A_2 = \{(r, r)\}$
$P(A_2) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{16}$

(b) ohne Zurücklegen:
$A_0 = \{(s, s)\}$

$P(A_0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12}$

$A_1 = \{(r, s), (s, r)\}$
$P(A_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{12} + \frac{4}{12} = \frac{8}{12}$

$A_2 = \{(r, r)\}$
$P(A_2) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12}$

Lösung zu Aufgabe 8
2 rote 4 schwarze Kugeln n = r + s = 6 k = 3 $|\Omega| = 6^3$
(a)Mit Zurücklegen:
$A_0 = \{s, s, s\}$
$P(A_0) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{64}{218}$

$A_1 = \{(r, s, s), (s, r, s), (s, s, r)\}$
$P(A_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{32}{218} + \frac{32}{218} + \frac{32}{218} = \frac{96}{218}$

$A_2 = \{(r, r, s), (s, r, r), (r, s, r)\}$
$P(A_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{16+16+16}{281} = \frac{48}{218}$

$A_3 = \{(r, r, r)\}$
$P(A_3) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{218}$

(b)Ohne Zurücklegen:
$A_0 = \{(s, s, s)\}$
$P(A_0) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$

$A_1 = \{(r, s, s), (s, r, s), (s, s, r)\}$
$P(A_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

$A_2 = \{(r, r, s), (s, r, r), (r, s, r)\}$
$P(A_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

$A_3 = \emptyset$
$P(A_3) = 0$

Lösung zu Aufgabe 9
3 rote 4 schwarze Kugeln n = r + s = 7 k = 3 $|\Omega| = 7^3$
(a)Mit Zurücklegen:
$A_0 = \{s, s, s\}$
$P(A_0) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{64}{343}$

$A_1 = \{(r, s, s), (s, r, s), (s, s, r)\}$
$P(A_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{48}{343} + \frac{48}{343} + \frac{48}{343} = \frac{144}{343}$

$A_2 = \{(r, r, s), (s, r, r), (r, s, r)\}$
$P(A_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{36+36+36}{343} = \frac{108}{343}$

$A_3 = \{(r, r, r)\}$
$P(A_3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{27}{343}$

(b)Ohne Zurücklegen:
$A_0 = \{(s, s, s)\}$
$P(A_0) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$

$A_1 = \{(r, s, s), (s, r, s), (s, s, r)\}$
$P(A_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35} + \frac{6}{35} + \frac{6}{35} = \frac{18}{35}$

$A_2 = \{(r, r, s), (s, r, r), (r, s, r)\}$
$P(A_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35} + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} = \frac{12}{35}$

$A_3 = \{(r, r, r)\}$
$P(A_3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$

Lösung zu Aufgabe 10
3 rote 4 schwarze Kugeln n = r + s = 7 k = 3 $|\Omega| = 7^3$
(a)Mit Zurücklegen:
$A_0 = \{r, r, r\}$
$P(A_0) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{27}{343}$

$A_1 = \{(s, r, r), (r, s, r), (r, r, s)\}$
$P(A_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{36}{343} + \frac{36}{343} + \frac{36}{343} = \frac{108}{343}$

$A_2 = \{(s, s, r), (r, s, s), (s, r, s)\}$
$P(A_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{48+48+48}{343} = \frac{144}{343}$

$A_3 = \{(s, s, s)\}$
$P(A_3) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{64}{343}$

(b)Ohne Zurücklegen:
$A_0 = \{(r, r, r)\}$
$P(A_0) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$

$A_1 = \{(s, r, r), (r, s, r), (r, r, s)\}$
$P(A_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{35} + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} = \frac{12}{35}$

$A_2 = \{(s, s, r), (r, s, s), (s, r, s)\}$
$P(A_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35} + \frac{6}{35} + \frac{6}{35} = \frac{18}{35}$

$A_3 = \{(s, s, s)\}$
$P(A_3) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$

Lösung zu Aufgabe 11

2 rote 5 schwarze Kugeln n = r + s = 7 k = 3 $|\Omega| = 7^3$

(a)Mit Zurücklegen:

$A_0 = \{s, s, s\}$

$P(A_0) = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{125}{343}$

$A_1 = \{(r, s, s), (s, r, s), (s, s, r)\}$

$P(A_1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{50}{343} + \frac{50}{343} + \frac{50}{343} = \frac{150}{343}$

$A_2 = \{(r, r, s), (s, r, r), (r, s, r)\}$

$P(A_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{20+20+20}{343} = \frac{60}{343}$

$A_3 = \{(r, r, r)\}$

$P(A_3) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{343}$

(b)Ohne Zurücklegen:

$A_0 = \{(s, s, s)\}$

$P(A_0) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{7}$

$A_1 = \{(r, s, s), (s, r, s), (s, s, r)\}$

$P(A_1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{21} + \frac{4}{21} + \frac{4}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

$A_2 = \{(r, r, s), (s, r, r), (r, s, r)\}$

$P(A_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

$A_3 = \emptyset$

$P(A_3) = 0$

Nach der Verdoppelung der Kugelanzahl:

(a) Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich nicht

(b) ohne Zurücklegen:

$A_0 = \{(s, s, s)\}$

$P(A_0) = \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{8}{12} = \frac{30}{91}$

$A_1 = \{(r, s, s), (s, r, s), (s, s, r)\}$

$P(A_1) = \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} + \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{9}{12} + \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{4}{12} = \frac{15}{91} + \frac{15}{91} + \frac{15}{91} = \frac{45}{91}$

$A_2 = \{(r, r, s), (s, r, r), (r, s, r)\}$

$P(A_2) = \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{10}{12} + \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{3}{12} + \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{3}{12} = \frac{5}{91} + \frac{5}{91} + \frac{5}{91} = \frac{15}{91}$

$A_3 = \{(r, r, r)\}$ $\qquad P(A_3) = \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} = \frac{1}{91}$

Lösung zu Aufgabe 12

a.

Man wählt 10 Student/innen von den insgesamt 40 Student/innen aus, diese kommen in die Gruppe 1, dann wählt man 10 Student/innen aus den verblieben 30 Student/innen aus, diese kommen in die Gruppe 2, aus den letzten 20 Student/innen wählt man 10 Student/innen für die Gruppe 3 aus, und die letzten 10 Student/innen kommen in die Gruppe 4.

$\binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{10}{10} = (\binom{40}{10,10,10,10}) = \frac{40!}{(10!)^4} = 4.71 \cdot 10^{21}$

b.

Hier ist nur wichtig wer mit wem in einer Gruppe ist, aber nicht in welcher Gruppe(da diese nicht unterscheidbar sind).D.h.man muss das Ergebnis aus a) durch die Anzahl möglicher Permutationen der Gruppen dividieren, da es vier Gruppen sind ist die Anzahl möglicher Permutationen = 4!

$\binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{10}{10} \cdot \frac{1}{4!} = (\binom{40}{10,10,10,10}) \cdot \frac{1}{4!} = \frac{40!}{(10!)^4 \cdot 4!} = 1.96 \cdot 10^{20}$

Lösung zu Aufgabe 13

$\Omega = \{(w_1, ..., w_n, s_1, ..., s_m)\}$

$20 \leq n \leq 45 \quad 10 \leq m \leq 35$ n + m = 55

A_i := "Die gezogene Kugel ist weiß" i = 1,2,3,4,5

$$\prod_{i=1}^{5} P(A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5)$$

$P(A_1) = \frac{\binom{20}{1}\binom{10}{0}}{\binom{30}{1}}$

$P(A_2) = \frac{\binom{25}{1}\binom{10}{0}}{\binom{35}{1}}$

$P(A_3) = \frac{\binom{30}{1}\binom{10}{0}}{\binom{40}{1}}$

$P(A_4) = \frac{\binom{35}{1}\binom{10}{0}}{\binom{45}{1}}$

$P(A_5) = \frac{\binom{40}{1}\binom{10}{0}}{\binom{50}{1}}$

$$\prod_{i=1}^{5} P(A_i) = \frac{\binom{20}{1}\binom{10}{0}}{\binom{30}{1}} \cdot \frac{\binom{25}{1}\binom{10}{0}}{\binom{35}{1}} \cdot \frac{\binom{30}{1}\binom{10}{0}}{\binom{40}{1}} \cdot \frac{\binom{35}{1}\binom{10}{0}}{\binom{45}{1}} \cdot \frac{\binom{40}{1}\binom{10}{0}}{\binom{50}{1}} = \frac{\binom{20}{1}\binom{25}{1}}{\binom{45}{1}\binom{50}{1}}$$

$$= \frac{20 \cdot 25}{45 \cdot 50} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$$

Lösung zu Aufgabe 14

a)

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_{10}) \mid \omega_i \in \{1, ..., 32\}\ \omega_i < \omega_j \text{ für } i < j\} \qquad \mid \Omega \mid = \binom{32}{10}$

Insgesamt gibt es vier Bauern, wenn Spieler 1 zwei Bauern hat(A = { Spieler 1 hat zwei Buben }) folgt daraus, $\mid A \mid = \binom{4}{2}\binom{28}{8}$,da er zwei der vier Bauern hat und acht Karten entstammen den restlichen Karten (32 Karten weniger 4 Bauern gleich 28 Karten).

$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{8}}{\binom{32}{10}} \approx 0,289$

b) Jeder Spieler hat genau einen Bauern.

$\Omega = \{\ \omega = (\omega_{1_1}, ..., \omega_{1_{10}}, \omega_{2_1}, ..., \omega_{2_{10}}, \omega_{3_1}, ...\omega_{3_{10}}, \omega_{4_1}, \omega_{4_2}) \mid \omega_{i_j} \in \{1, ..., 32\}$

$\omega_{i_1} < ... < \omega_{i_{10}}\ ,\ i \in \{1, 2, 3\}\ ,\ \omega_{4_1} < \omega_{4_2} \omega_{i_j} \neq \omega_{kl}, (i, j) \neq (k, l)\}$

$\mid \Omega \mid = \binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}\binom{2}{2}$

A $= \{\ \omega \in \Omega \mid \omega_{i1} \in \{1, ..., 4\} \omega_{42} \in \{5, ..., 32\} \quad i \in \{1, 2, 3\}\ ,\ \omega_{41} \in \{1, ..., 4\}$

$\omega_{42} \in \{5, ..., 32\}\}$

$\mid A \mid = \binom{4}{1}\binom{28}{9}\binom{3}{1}\binom{19}{9}\binom{1}{1}\binom{1}{1} \Rightarrow \mathrm{P(A)} = \frac{|A|}{|\Omega|} \approx 0.0559$

Lösung zu Aufgabe 15

a) Für jedes Spiel gibt es drei Möglichkeiten und es gibt insgesamt 11 Spiele, daraus folgt $3^{11} = 177147$ verschiedene Tippreihen nach dem Multiplikationsprinzip.

b) Auch hier gibt es drei Möglichkeiten pro Spiel aber insgesamt 13 Spiele, daraus folgt $3^{13} = 1594323$ verschiedene Tippreihen nach dem Multiplikationsprinzip.

Lösung zu Aufgabe 16

Dabei handelt sich um eine Kombination ohne Wiederholung, da jede Zahl genau einmal gezogen werden kann, und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, d.h. die Ziehungsfolge der Zahlen hat keinen Einfluss auf den Erfolg.

Sei A das Ereignis 6 Richtige.

$|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$

Es gibt 13 983 816 mögliche (verschiedene) Kombinationen.

$P(A) = \frac{1}{13983816}$

Lösung zu Aufgabe 17

Dabei handelt sich um eine Kombination ohne Wiederholung, da jede Zahl genau einmal gezogen werden kann, und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, d.h. die Ziehungsfolge der Zahlen hat keinen Einfluss auf den Erfolg.

$|\Omega| = \binom{45}{6} = 8145060$

Wenn man drei Richtige hat, hat man auch drei nicht richtige Zahlen.

$|A| = \binom{6}{3} \cdot \binom{39}{3} = 182780$

$P(A) = \frac{182780}{8145060} \approx 0.022440\ldots$

Lösung zu Aufgabe 18
Überhaupt einen Gewinn zu erzielen bedeutet, ist in beiden Spielen gleich, entweder genau 3 Richtige oder genau 4 Richtige oder genau 5 Richtige oder 6 Richtige zu haben.

a)$P = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}+\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}+\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}+\binom{6}{6}\cdot\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{246820+13545+258+1}{13983816} \approx 0.018637\ldots$

b)$P = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{39}{3}+\binom{6}{4}\cdot\binom{39}{2}+\binom{6}{5}\cdot\binom{39}{1}+\binom{6}{6}\cdot\binom{39}{0}}{\binom{45}{6}} = \frac{182780+11115+234+1}{8145060} \approx 0.023834\ldots$

Quelle: Stochastikaufgaben mit Lösungen
Mit freundlicher Unterstützung von: und http://www.gogirlglow.de