Stochastische Unabhängigkeit

Aufgaben

Aufgabe 1
Ein fairer Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Es seien die folgenden Ergebnisse gegeben:

A = { der Wurf ist eine 6 }

B = { die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe ist gerade}

C = { mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen ist eine 3}

Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen von Ereignissen unabhängig sind:

(a) A und B

(b) A und C

(c) B und C

(d) A, B und C

Aufgabe 2
Ein Würfel wird zweimal geworfen. Sind die folgenden Ereignisse stochastisch unabhängig, bzw. paarweise stochastisch unabhängig ?

A: Die Augenzahl beim ersten Wurf ist gerade.

B: Die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade.

C: Beim zweiten Wurf fällt eine Primzahl.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1
Das dreimalige Werfen eines fairen Würfels entspricht der Gleichverteilung auf dem Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}^3$.

(a) Wir überprüfen die Ereignisse A und B auf Unabhängigkeit.
$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{6^2}{6^3}$

$P(B) = \frac{6}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 6}{6^3}$

$P(A \cap B) = P(\{(6, \omega_1, \omega_2) | \omega_2, \omega_3 \in \{1, 2, ..., 6\}, \omega_2 \, \text{gerade}\})$
$P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{12}$
$P(A) \cdot P(B) = \frac{6^2}{6^3} \cdot \frac{6 \cdot 3 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
Die Ereignisse A und B sind unabhängig.

(b) Wir überprüfen die Ereignisse A und C auf Unabhängigkeit.

$P(A \cap C) = P(\{(6, \omega_2, \omega_3) | \omega_2, \omega_3 \in \{1, 2, ..., 6\}, \omega_2 = 3 \vee \omega_3 = 3\})$
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) | \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{1, 2, ..., 6\},$
$\omega_2 = 3 \vee \omega_3 = 3\})$
$P(A \cap C) = P(A) \cdot (1 - P(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) | \omega_1 \in \{1, 2, ..., 6\},$
$\omega_2, \omega_3 \in \{1, 2, 4, 5, 6\}\}))$
$P(A \cap C) = \frac{6^2}{6^3} \cdot (1 - \frac{6 \cdot 5^2}{6^3}) = \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{25}{36}) = \frac{11}{216}$
Da die beiden Ergebnisse nicht gleich sind, sind die Ereignisse A und C nicht unabhängig.

(c) Wir überprüfen die Ereignisse B und C auf Unabhängigkeit.
$P(B \cap C) = P(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) | \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{1, 2, ..., 6\}, \omega_1 + \omega_2 \, \text{gerade}\,,$
$\omega_1 = 3 \vee \omega_2 = 3 \vee \omega_3 = 3\})$

$P(B \cap C) = P(C|B) \cdot P(B) = (1 - P(C^c|B)) \cdot P(B) = (1 - \frac{P(C^c \cap B)}{P(B)}) \cdot P(B)$

$P(B \cap C) = P(B) - P(B \cap C^c) = \frac{1}{2} - \frac{(2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) \cdot 5}{216} = \frac{1}{2} - \frac{65}{216} = \frac{43}{216}$

$P(B) \cdot P(C) = P(B) \cdot (1 - P(C^c)) = \frac{18}{6^2} \cdot (1 - \frac{5^3}{6^3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{91}{216} = \frac{91}{432}$
Da die beiden Ergebnisse nicht gleich sind, sind die Ereignisse B und C nicht unabhängig.

(d) Wenn A,B und C unabhängig wären, müsste die Produktformel für alle Teilmengen gelten, dies ist jedoch nach den Teilaufgaben b) bzw. c) nicht der Fall. Damit sind die Ereignisse A,B, und C abhängig.

Lösung zu Aufgabe 2
$P(\bigcap_i A_i) = \prod_i P(A_i) \quad \Omega = \{1, ..., 6\}^2$

$A = \{\omega \in \Omega : \frac{1}{2}\omega_i \in \mathbb{N}\}$

$B = \{\omega \in \Omega : \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 \in \mathbb{N}\}$

$C = \{\omega \in \Omega : \omega_2 \in \{2, 3, 5\}$
$\mid A \mid = 18 = \mid B \mid = \mid C \mid$
$\Rightarrow P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{2} = P(A)$

$P(B \mid C) = \frac{1}{2} = P(B)$

$\Rightarrow$ A,B,C paarweise stochastisch unabhängig

$P(A \cap B \cap C) =$ P(A)P(B)P(C)

$\frac{1}{12} \neq \frac{1}{8} \Rightarrow$ A,B,C stochastisch abhängig

---

Quelle: Stochastik
Mit freundlicher Unterstützung von: und http://www.gogirlglow.de