Zentraler Grenzwert Satz

Aufgaben

Aufgabe 1
Um ihr Studium zu finanzieren jobben Sie nebenbei als Interviewer und befragen bei einer ihrer Missionen zufällig Wahlberechtigte um das Wahlergebnis einer bestimmten Partei vorherzusagen. Bestimmen Sie approximativ, wie viele Wähler Sie befragen müssen, damit Sie sich bei Ihrer Prognose mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 um höchstens 1% (absolut) irren? Benutzen Sie zur Approximation den zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace.

Aufgabe 2
Die Anzahl der Wähler die sie laut der vorherigen Aufgabe befragen müssten ist Ihnen zu hoch. Wieviele Wähler müssen Sie befragen, damit Sie sich mit Ihrer Prognose mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 um höchstens 2% (Prozentpunkte) irren? Benutzen Sie wieder den zentralen Grenzwertsatz zur Approximation.

Aufgabe 3
Als Sie versuchen sich in Ihrer Heimatstadt von Studium und Job zu erholen, lesen sie in der lokalen Zeitung einen Bericht zur anstehenden Gemeinderatswahl. Der Bericht beinhaltet neben den üblichen Wahlversprechen eine angebliche repräsentative Umfrage zur Wahl, im Kleingedruckten findet sich der Hinweis das sich Prognose mit mindestens 99% um höchstens 1% irrt. Aufgrund der Ergebnisse der frühren Aufgaben trauen Sie dieser Umfrage nicht, insbesondere da es in Ihrer Heimatstadt knapp 15000 Wahlberechtigte gibt. Wieviele Wähler hätte man befragen müssen um eine Umfrage mit der oben beschrieben Genauigkeit durchführen zu können?

Aufgabe 4
Jedes Jahr findet zu Beginn des Wintersemester eine Computereinführungsveranstaltung statt. Aus langjähriger Erfahrung weiß man, daß etwa 18 % der angemeldeten Kursteilnehmer nicht zum Kurs erscheinen. Und da jeder Teilnehmer einen eigenen Rechner während des Kurses braucht können nicht mehr Teilnehmer als freie Computer am Kurs teilnehmen. Insgesamt gibt es zehn Kurstermine mit je 22 Plätzen und in jedem der zwei Fächer, die für diesen Kurs in Frage kommen, gibt es je 120 Erstsemster. Um die Rechnung zu vereinfachen wird von einem großen Termin ausgegangen, d.h. ein Termin mit 220 Plätzen. Berechnen Sie mittels Approximation durch den zentralen Grenzwertsatz

1. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle Kursteilnehmer die zum Kurs da sind einen Platz finden, wenn sich für den Kurs alle Erstsemster angemeldet haben.
2. wie viele Anmeldungen dürfen höchstens angenommen werde, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 alle erscheinenden Kursteilnehmer in einem Kurs mit 220 Plätzen einen Platz finden sollen.

Aufgabe 5
Um knapp zwei Kilogramm Brombeermarmelade zu kochen braucht man ungefähr 1000 Brombeeren. Aus jahrelanger Erfahrung wissen Sie das in einer von hundert ein Wurm ist. Wie groß ist Wahrscheinlichkeit das in den tausend Brombeeren in höchstens fünf ein Wurm ist? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit jeweils,

1. exakt,

2. mit der Approximation durch die Poisson-Verteilung,

3. mit dem Zentralen Grenzwertsatz

Bestimmen Sie auch den jeweiligen relativen Approximationsfehler.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1
Sei n die Zahl der befragten Wahlberechtigten. Sei S_n die Zahl der Wähler der Partei, dann ist S_n $b_{n,p}$ verteilt mit der Wahrscheinlichkeit p dafür, daß ein zufällig ausgewählter Wähler für die Partei stimmt.
$P(\mid S_n - np \mid \leq 0.01n) \geq 0.9$
$P(S_n \leq np + 0.01n) - P(S_n \leq np - 0.01n)$
$E[S_n] = np \Rightarrow \infty(n \to \infty)$
$Var(S_n) = np(1-p) = npq \to \infty(n \to \infty)$
mit $(1-p) = q$
$S_n^* = \frac{(S_n - np)}{\sigma_n} = \frac{(S_n - E[S_n])}{\sqrt{Var(S_n)}}$
$P(-0.01 \leq \frac{S_n}{n} - p \leq 0.01) \geq 0.9$
$P(\frac{-0.01n}{\sqrt{npq}} \leq S_n^* \leq \frac{0.01n}{\sqrt{npq}}) \approx \Phi(\frac{0.01n}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{-0.01n}{\sqrt{npq}}) = 2\Phi(\frac{0.01n}{\sqrt{npq}}) - 1 \geq 0.9$
$\Rightarrow \Phi(\frac{0.01n}{\sqrt{npq}}) \geq 0.95$ bzw. $\frac{0.01}{\sqrt{np(1-p)}} \geq 1.65$
$\Rightarrow n \geq \frac{1.65^2 \cdot p(1-p)}{0.01^2} = 6806.25$

Der Maximalwert von $p(1-p) = \frac{1}{4} \Rightarrow n \geq 6807$

Lösung zu Aufgabe 2
Sei n die Anzahl der Wähler, und S_n die Zahl der Wähler der Partei. Dann ist S_n binomialverteilt mit einer Wahrscheinlichkeit p also $B_{n,p}$. Wobei p die Wahrscheinlichkeit dafür ist dass ein zufällig ausgewählter Wähler diese bestimmte Partein wählt. Und $1 - p = q$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist dass er eine der anderen Partein wählt. Der Erwartungswert ist $ES_n = n \cdot p$ für große n. Mit den Vorgaben aus der Aufgabe: mindestens 0.9 und max. 0.02 Abweichung ergibt sich folgendes.
$ES_n = n \cdot p \qquad VarS_n = np(1-p) = npq$
$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sigma_n} = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}}$
$P(|S_n - np| \leq 0.02n) \geq 0.9$
$P(-0.02n \leq S_n - E[S_n] \leq 0.02n) \geq 0.9$
$P(-0.02 \leq \frac{S_n}{n} - p \leq 0.02n) \geq 0.9$
$P(\frac{-0.02}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\frac{S_n}{n} - p}{\sqrt{npq}} \leq \frac{0.02}{\sqrt{npq}}) \geq 0.9$
$P(\frac{-0.02}{\sqrt{npq}} \leq S_n^* \leq \frac{0.02}{\sqrt{npq}}) \approx \phi(\frac{0.02n}{\sqrt{npq}}) - \phi(\frac{-0.02n}{\sqrt{npq}})$
$= 2\phi(\frac{0.02n}{\sqrt{npq}}) - 1 \geq 0.9$
$= \phi(\frac{0.02n}{\sqrt{npq}}) \geq 0.95$
Nach Tabelle: $\frac{0.02n}{\sqrt{npq}} \geq 1.65$
$n \geq \frac{1.65^2 \cdot pq}{0.02^2}$
mit $\max pq = \frac{1}{4}$
$n \geq 1701.5625$
Es müssen mindesten $n = 1702$ Wähler befragt werden.

Lösung zu Aufgabe 3

$ES_n = n \cdot p \qquad VarS_n = np(1-p) = npq$

$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sigma_n} = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}}$

$P(|S_n - np| \leq 0.01n) \geq 0.99$

$P(-0.01n \leq S_n - E[S_n] \leq 0.01n) \geq 0.99$

$P(-0.01 \leq \frac{S_n}{n} - p \leq 0.01n) \geq 0.99$

$P(\frac{-0.01}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\frac{S_n}{n} - p}{\sqrt{npq}} \leq \frac{0.01}{\sqrt{npq}}) \geq 0.99$

$P(\frac{-0.01}{\sqrt{npq}} \leq S_n^* \leq \frac{0.01}{\sqrt{npq}}) \approx \phi(\frac{0.01n}{\sqrt{npq}}) - \phi(\frac{-0.01n}{\sqrt{npq}})$

$= 2\phi(\frac{0.01n}{\sqrt{npq}}) - 1 \geq 0.99$

$= \phi(\frac{0.01n}{\sqrt{npq}}) \geq 0.995$

Nach Tabelle: $\frac{0.02n}{\sqrt{npq}} \geq 2.58$

$n \geq \frac{2.58^2 \cdot pq}{0.01^2}$

mit $\max pq = \frac{1}{4}$

$n \geq 16641$

Es müssen mindesten $n = 16641$ Wähler befragt werden. Was hier nicht möglich ist da es nur 15 000 gibt.

Lösung zu Aufgabe 4

Die Zahl der Anmeldungen n ist hier 240 $(2 \cdot 120)$, die Anzahl der verfügbaren Computer ist m mit $m = 220$. Und p ist die Wahrscheinlichkeit das eine angemeldete Person kommt mit $p = 0.82$, q ist die Wahrscheinlichkeit das eine angemeldete Person nicht kommt, d.h. $q = 1 - p = 0.18$.

Da es sich um eine Binomialverteilung handelt folgt für S_n, die gesuchte bzw. kritische Anzahl der Anmeldungen.

$ES_n = n \cdot p$

$VarS_n = npq$

a)

$$\begin{aligned}
P(0 \leq S_n \leq m) &= P(-np \leq S_n - np \leq m - np) \\
&= P(\frac{-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}}) \\
&\overset{\text{ZGS}}{\approx} \Phi(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{-np}{\sqrt{npq}}) \\
&= \Phi(\frac{220 - 240 \cdot 0.82}{\sqrt{240 \cdot 0.82 \cdot 0.18}}) - \Phi(\frac{-240 \cdot 0.82}{\sqrt{240 \cdot 0.82 \cdot 0.18}}) = \Phi(3.898) - \Phi(-33.066) \\
&= \Phi(3.898) - 1 + \Phi(33.066) \\
&\approx 0.9999
\end{aligned}$$

b)

$P(S_n \leq 220) = P(\frac{S - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{220 - np}{\sqrt{npq}}) \approx \Phi(\frac{220 - np}{\sqrt{npq}}) \geq 0.99$

$\Phi(\frac{220 - 0.82n}{\sqrt{0.82 \cdot 0.18} \cdot \sqrt{n}}) \geq 0.99$

$\Leftrightarrow (\frac{220 - 0.82n}{\sqrt{0.82 \cdot 0.18} \cdot \sqrt{n}}) \geq \Phi^{-1}(0.99) \geq 2.33$

$\Leftrightarrow (\frac{220 - 0.82n}{\sqrt{0.82 \cdot 0.18} \cdot \sqrt{n}}) \geq 2.33$

$\Leftrightarrow n \leq 250.99$

D.h. es dürfen höchstens 250 Anmeldungen angenommen werden.

Lösung zu Aufgabe 5

Die Wahrscheinlichkeit, eine Beere mit einem Wurm gepflückt zu haben, ist $p = 0.01$. Die Anzahl der Beeren mit Wurm, bei den 1000 Brombeeren ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 1000, p = 0.01$.

1. Daher ist folgendes zu berechnen
$$B_{1000,p}(0,\dots 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{1000}{k} p^k (1-p)^{1000-k}$$
Man erhält mit Hilfe eines Computerprogramms als auf vier Nachkommastellen gerundetes Ergebnis 0.0661.

2. die Binomialverteilung lässt sich durch die Poissonverteilung approximieren $B_{1000,p}(0,\dots 5) \approx P_\lambda(0,\dots 5)$.
Der Erwartungswert ist $\lambda = 1000 \cdot p = 10$. Daher ist folgendes zu berechnen
$$P_{1000,p}(0,\dots 5) = \sum_{k=0}^{5} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$
Als Ergebnis erhält man 0.0671.
Der relative Fehler der Approximation ist $\frac{0.0671-0.0661}{0.0661} \approx 0.0150 = 1.5\%$.

3. Sei S_n die Anzahl der Brombeeren mit Wurm.
$$\begin{array}{rclcl} E(S_n) & = & n \cdot p & = & 1000 \cdot 0.01 & = & 10 \\ Var(S_n) & = & npq & = & 1000 \cdot 0.01 \cdot 0.99 & = & 9.9 \\ \sigma_n & := & \sqrt{Var(S_n)} & \approx & 3.1464 \end{array}$$
und $S_n^* := \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}$.
$$\begin{array}{rcl} P(0 \le S_n \le 5) & = & P(\frac{0-E(S_n)}{\sigma_n} \le S_n^* \le \frac{5-E(S_n)}{\sigma_n} \\ & \stackrel{\text{ZGS}}{\approx} & \phi\left(\frac{5-10}{3.1464}\right) - \phi\left(\frac{0-10}{3.1464}\right) = \phi\left(\frac{-5}{3.1464}\right) - \phi\left(\frac{-10}{3.1464}\right) \\ & = & \phi(-1.59) - \phi(-3.18) = \phi(3.18) - \phi(1.59) \\ & = & 0.9993 - 0.9441 = 0.0552 \end{array}$$
Als Ergebnis erhält man 0.0552.
Der relative Fehler der Approximation ist $\frac{0.0552-0.0661}{0.0661} \approx -0.1649 = -16.49\%$.

Quelle: Stochastikaufgaben mit Lösungen
Mit freundlicher Unterstützung von: und http://www.gogirlglow.de